A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok

„Az életben a legjobb dolgok azok, amikor az ember tisztán látja az összefüggéseket.” /***Albert Einstein***/

Számomra elgondolkodtató, hogy a speciális relativitáselméletben a klasszikus mechanikából ismert **Galilei**-féle eltolás jellegű transzformáció helyére egy hiperbolikus forgatás jellegű transzformáció lép. Az eltolásnak az euklideszi geometria szerint nincs fixpontja[1], a hiperbolikus forgatásnak viszont van. (A **Galilei**-transzformáció leírásánál is általában feltételezzük a koordinátarendszerek kezdeti egybeesését, de itt a v sebességgel mozgó koordinátarendszer origója is elmozdul a mozgás során, míg a **Lorentz**-transzformációnál nem.) Amint a **Lorentz**-transzformáció a hiperbolikus számsíkon modellezhető, mégpedig egy hiperbolikus egységvektorral való szorzással[2], hasonlóan levezethető, hogy a **Galilei**-transzformáció a parabolikus számsíkon[3] modellezhető, szintén egy egységvektorral való szorzással, természetesen itt parabolikus egységvektorról van szó.

1. A parabolikus számsík és a Galilei-transzformáció

Mozogjon a K’ rendszer egyenesvonalú egyenletes mozgással, és v sebességgel a K rendszer z koordinátatengelye mentén[4]. Ha a két rendszer eredetileg egybeesett, azaz origójuk azonos, akkor a **Galilei**-transzformáció szerint:

$z'=z-vt$

$t'=t$

és nyilván

$z=z'+vt$

$t=t'$

A fenti egyenletekben t-nek a parabolikus számsík valós tengelyét, x-et, z-nek pedig a parabolikus képzetes tengelyt, y-t feleltetjük meg, azaz a valós tengely az időnek, a parabolikus képzetes tengely pedig az egyik térdimenziónak a modellje, (azaz $t\to x$, $z\to y$). Ekkor a megfigyelő és a hozzá képest v sebességgel mozgó inerciarendszerbeli téridőpontok

---

[1] A projektív geometria szerint viszont az eltolásnak is van fix pontja, mégpedig az eltolási egyenes ideális pontja, „végtelen távoli” pontja.

[2] Lásd ehhez a **C. Mellékletet**.

[3] A parabolikus számok alapvető tulajdonságait lásd az **A. Mellékletben**

[4] K koordinátarendszert mindig definiálhatjuk úgy, hogy a z tengelye a K’ rendszer mozgásirányába essék. A szokásos x tengely helyett pedig azért választottam a z térbeli koordinátatengelyt, mert nem szeretném, ha zavart okozna a későbbiekben a mozgás síkja koordinátatengelyeinek megfeleltetése a parabolikus számsík x és y koordinátatengelyeivel.

(események) viszonyára a következő koordináta-összefüggést kapjuk a parabolikus számsíkon, mint téridő-modellen:

y’ = y-vx

x’ = x

Parabolikus számmal kifejezve:

$$x'+\mathbf{j}y' = x+\mathbf{j}(y-vx) = x\left(1+\mathbf{j}\left(\frac{y}{x}-v\right)\right) = x\left(1+\mathbf{j}\frac{y}{x}\right)(1-\mathbf{j}v) = (x+\mathbf{j}y)e^{-v\mathbf{j}}$$

Tehát **a parabolikus számsíkon modellezett Galilei-transzformációnak egy parabolikus egységvektorral való szorzás felel meg**.

2. A mechanika és a geometria

Örömmel fedeztem fel **I. J. Jaglom** 1985-ben magyarul is megjelent könyvét; *Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria*.[5] Ez a könyv tartalmazza – igaz, csak a Függelékében – a három kételemű szám leírását[6] és a **Galilei**-transzformáció modellezését a parabolikus számokkal, valamint a hiperbolikus számsíkon modellezhető **Lorentz**-transzformációt. **Jaglom** könyvének elég bonyolult a szerkezete, ezt maga a szerző is elismeri, és azzal magyarázza, hogy többféle olvasóhoz szól, akikről általában kevés matematikai tudást feltételez. Ez utóbbi csak annyiban igaz, hogy kevés alapfogalom ismeretét feltételezi, de egy laikus, a matematika iránt nem szenvedélyesen érdeklődő számára nehezen olvasható a könyv, ha egyáltalán olvasható. A könyv részletesebb ismertetését tervezem a jövőben, mert most csak átlapoztam, és így is találtam olyan érdekességeket, amelyek alapján biztosan megér egy mélyebb tanulmányozást. **Jaglom** megközelítése is figyelemre méltó, amikor azzal indít, hogy

> «…a klasszikus („galilei” vagy „newtoni”) mechanika és a geometria közötti kapcsolat már általában nem domborodik ki … Pedig éppen mechanikai meggondolások nyitják meg a – szerintem – legegyszerűbb utat a nemeuklideszi terek világába, és ez az út igen tanulságosan köti össze az *egybevágóság* geometriai és a *relativitási elvek* fizikai fogalmát.»

Ez a szemlélet – azaz a geometria fogalmainak megfeleltetése a fizika fogalmaival – rokon az enyémmel, hiszen én a matematikát nem feltalálásnak, hanem felfedezésnek tekintem, a természetből kiolvasott összefüggéseknek, akárhány absztrakciós szint is takarja el ezt a kapcsolatot.

Összegzés

Több korábbi cikkemben és itt a **C. Melléklet**ben is levezettem, hogy az egyszerűbb – az idő dimenzió mellett egyetlen térdimenzióban leírt – **Lorentz**-transzformáció a hiperbolikus számsíkon egy hiperbolikus egységvektorral való szorzással modellezhető. Ebben a cikkben azt mutattam be, hogy a klasszikus newtoni fizika inerciarendszereit jellemző **Galilei-**

---

[5] **I. J. Jaglom,** *Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria*, Gondolat – Budapest, 1985. A könyvről egy kis ismertető található a KÖMAL oldalán: http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200695

[6] Lásd a 5. lábjegyzetben szereplő könyv 402. oldalát.

transzformációt szintén egységvektorral való szorzással írhatjuk le, de a parabolikus számsíkon, és itt természetesen parabolikus egységvektorral való szorzásról van szó.

Ez rávilágít arra a fontos tényre is, hogy a **Lorentz**-transzformáció nem általánosabb, mint a **Galilei**-transzformáció, ahogy a hiperbolikus számok sem általánosabbak, mint a parabolikus számok, hiszen a kontinuumhipotézisben (CH) megfogalmazott végtelenfajtákhoz való viszonyukban különböznek.[7] Ezek a számok nem képeznek átmenetet egymásba, hanem közös az eredetük, és ez vonatkozik az általuk modellezett transzformációkra is. Az viszont igaz, hogy a kételemű számok képzeteseinek végtelen-értelmezését és topológiájukat tekintve van egyfajta „hierarchia”[8] e számok között:

- Egyrészt a komplex számsíkon két nem azonos szám távolságnégyzete (normanégyzete) csak pozitív lehet, a parabolikus számsíkon két nem azonos szám normanégyzete pozitív érték mellett 0 is lehet, a hiperbolikus számsíkon pedig két nem azonos szám normanégyzete pozitív, 0 és negatív értéket is felvehet.
- Másrészt a CH-ban megfogalmazott „köztes” számosságokra – azaz a természetes számok számossága és a valós számok számossága, a kontinuum számosság között létező, vagy hiányzó végtelen számosságok – tekintetében a komplex képzetesek azt modellezik, amikor ilyen nem létezik, a parabolikus képzetes modellje szerint egyetlen ilyen van, a hiperbolikus képzetesek által reprezentált CH-verzió szerint végtelen sok ilyen végtelen számosság létezik.

Véleményem szerint a kételeműekkel és az általuk modellezett transzformációkkal kapcsolatos kérdésekre a válaszokat a kételeműek „származásában” kell keresni. Gondolok itt a fent körvonalazott végtelenmodell szerepükre, és téridőt illusztráló funkciójukra. Ez utóbbival kapcsolatban – elfogadva az einsteini háttérfüggetlenség kritériumát – a téridőt én is az anyag által megformáltnak gondolom. Szerintem ezzel eljuthatunk a téridőt – és vele az őt modellező kételeműeket, valamint transzformációikat – alakító anyag matematikai modelljéhez. Tehát az általános relativitáselmélet számmodelljében kaphatunk választ sok-sok „miért” kérdésre, amit ugyan a „csitt!-és-számolj”[9] típusú fizikusok nem szeretnek, én viszont annál inkább.

---

[7] Ehhez lásd a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikk 2. pontját: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[8] Rendezési reláció nincs még definiálva sem a kételemű számok síkján, sem a kételeműek különböző képzetesei között. Több lehetőség kínálkozik erre, de több nehézséget is le kell küzdeni ezzel kapcsolatban, például azt, hogy a kételeműek képzetesei, mint végtelen-reprezentációk nem tesznek különbséget a végtelen extenzív és intenzív volta között, a végtelen legalapvetőbb tulajdonságát, a – klasszikus értelemben vett – megközelíthetetlenséget szemléltetik.

[9] Ugyan nem a *csitt* kifejezéssel szokták idézni ezt a fizikusoknak szóló tanácsot, de én még idézetben sem szívesen használom a durvább kifejezéseket.

A. Melléklet

Parabolikus számok

Parabolikus számok[10] alatt azokat a számokat értem, amelyek

x+y**j**

alakban írhatóak, ahol x és y valós számok **j**-re pedig az igaz, hogy $\mathbf{j}^2 = 0$, $\mathbf{j} \neq 0$.

Számsíkjuk matematikája még a hiperbolikus számsíknál is kidolgozatlanabb. Most csak a legelemibb összefüggéseket fogom megemlíteni, amelyek legfontosabb tulajdonságai megtalálhatóak egy korábbi cikkemben[11], most ezek közül csak azokat emelem ki, amelyekre szükségem lesz a későbbiekben.

A komplex számokhoz hasonlóan a parabolikus számok is felírhatóak egy trigonometrikusnak nevezhető alakban:

$$x + y\boldsymbol{j} = \varrho\,(\operatorname{cosp}\Theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sinp}\Theta)$$

Ahol Θ -ra és $\varrho - ra$ az igaz, hogy

$$\operatorname{tanp}\Theta = \frac{y}{x}$$

$$\varrho = \sqrt[2]{x^2}$$

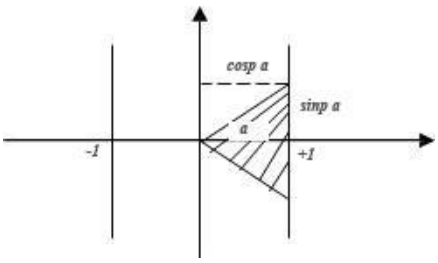
$\Theta - t$ a parabolikus számvektor argumentumának, $\varrho - t$ a normájának nevezem.

A parabolikus szögfüggvényekre a következők igazak:

$$\operatorname{cosp}\Theta\boldsymbol{j} \equiv 1$$

$$\operatorname{sinp}\Theta\boldsymbol{j} = \Theta\boldsymbol{j}$$

Azok a számok, amelyekre $\sqrt[2]{x^2} = \varrho$, az y tengellyel párhuzamos egyenespáron helyezkednek el, amely a számsík vízszintes, azaz a valós számokat tartalmazó tengelyét a $\pm\,\varrho$ pontban metszik. Ha $\varrho^2 = 1$, akkor az úgynevezett egységparabolán helyezkednek el



Itt is definiálható exponenciális függvény, és ennek alapján a szám exponenciális alakra hozható:

$$x + y\boldsymbol{j} = \varrho\, e^{\Theta\boldsymbol{j}}$$

Ahol

$$\varrho = \sqrt[2]{x^2} \qquad \operatorname{tanp}\Theta = \frac{y}{x} \quad \text{és általában} \quad e^{\Theta\boldsymbol{j}} = 1 + \Theta\boldsymbol{j}$$

---

[10] Szakirodalomban duális vagy **Study**-féle számokként fordulnak még elő.

[11] Lásd a „*Kételemű számok összehasonlítása*" című cikket: http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html

B. Melléklet

Hiperbolikus számok

A hiperbolikus számok azok, amelyek

x + y**k**

alakban írhatók fel, ahol x és y valós számok, és $\mathbf{k}^2$ =+1, de **k**≠+1.

A komplex számok trigonometrikus alakjához nagyon hasonló alakban írhatók fel, amelyet polárkoordinátás alaknak is nevezünk:

$$x + yk = \varrho(\cosh\Theta + \boldsymbol{k}\sinh\Theta)$$

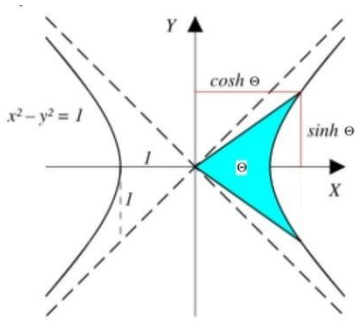
Ahol

$$\tanh\Theta = \frac{y}{x}$$

$$\varrho = \sqrt[2]{x^2 - y^2}$$

$\Theta - t$ a hiperbolikus számvektor argumentumának, $\varrho - t$ a normájának nevezem

Azok a számok, amelyekre $\sqrt[2]{x^2 - y^2} = \varrho$ egy olyan derékszögű – más szóval egyenlő szárú – hiperbolán helyezkednek el, amely a számsík vízszintes, azaz a valós számokat tartalmazó tengelyét a ±ρ pontban metszik. Ha $\varrho^2 = 1$, akkor az úgynevezett egységhiperbolán helyezkednek el:



Ezekre a számokra is lehet exponenciális függvényt definiálni, és ezzel a komplex számokhoz ismét csak nagyon hasonló exponenciális alakra lehet hozni a hiperbolikus számokat:

$$x + yk = \varrho e^{\Theta\boldsymbol{k}} \qquad (M0)$$

A hiperbolikus számok legfontosabb tulajdonságai megtalálhatóak a *Kételemű számok összehasonlítása* című cikkemben[12].

[12] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html

C. Melléklet

Hiperbolikus függvények, majd hiperbolikus számok használata a téridő leírására

Az inerciarendszerek között a **Lorentz**-transzformációval leírt tér- és időkoordináták klasszikusan a következő egyenletrendszerekkel írhatóak le, ha egy K koordinátarendszerben a z koordinátatengely mentén v sebességgel mozgó K' inerciarendszerben „vesszős" koordinátákkal jelöljük a koordinátákat[13]:

$$z' = \frac{z - \frac{v}{c}tc}{\sqrt[2]{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(M1)

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}z}{\sqrt[2]{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Egy korábbi cikkemben[14] már tárgyaltam a **Lorentz**-transzformáció leírását hiperbolikus számokkal, de a könnyebb áttekintés miatt itt is bemutatom.

Mélyebb elemzés helyett hivatkozom **Taylor-Weeler** „*Téridő-fizika*"[15] című könyvére, amelyben nagyszerűen levezetik a szerzők, és a geometriáját is jól szemléltetik a **Lorentz**-transzformációnak, amely sokkal szemléletesebb alakba hozható hiperbolikus függvények használatával. Így az (M1) egyenletek koordinátáira a következő összefüggést kapjuk:

$$z' = z\ \cosh\Theta - ct\ \sinh\Theta$$

(M2)

$$ct' = ct\ \cosh\Theta - z\ \sinh\Theta$$

Ahol Θ-ra az igaz, hogy

$$\tanh\Theta = \frac{z}{ct}\left(= \frac{v}{c}\right) \qquad \text{(M3)}$$

Az (M1)-es képletek egy kicsit elrejtik, az (M2) egyenletekből viszont egészen jól *látható* a transzformáció jellege: **a koordinátatranszformáció egy hiperbolán való forgatást jelent, azaz hiperbolikus forgatást**. Ez a **hiperbolikus forgatás viszont nem térbeli, hanem téridőbeli**!

---

[13] A legáltalánosabb **Lorentz**-transzformáció meglehetősen bonyolult, mivel mind a négy koordinátát kombinálja, de a K koordinátarendszert mindig definiálhatjuk úgy, hogy a z tengelye a K' rendszer mozgásirányába essék. Mondhatjuk azt is, hogy izotróp tér esetén – ami inerciarendszereknél adott – leszűkíthetem a teret egyetlen dimenzióra. Ez az egyszerűbb alak „a relativitás valamennyi lényeges vonását tartalmazza" (**Feynman**). A parabolikus esethez hasonlóan itt is azért választottam a szokásos x tengely helyett a z térbeli koordinátatengelyt, mert nem szeretném, ha zavart okozna a későbbiekben e **Minkowski**-sík koordinátatengelyeinek megfeleltetése a hiperbolikus számsík x és y koordinátatengelyeivel.

[14] Lásd „*A szimplektikus teve „természetes előfordulásai" II.*" című cikket;
http://www.infinitemath.hu/images/stories/skalar_szorzat_ii_v2.pdf

[15] Lásd például:
http://books.google.hu/books?id=9KfpAy3zEZkC&printsec=frontcover&dq=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&hl=hu&sa=X&ei=_cPhT6PaEcWr-gbBxOCcAw&ved=0CDkQ6wEwAA#v=onepage&q=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&f=false

(M2)-ből z-re és ct-re:

$$z = z' \cosh\Theta + ct' \sinh\Theta$$

(M4)

$$ct = ct' \cosh\Theta + z' \sinh\Theta$$

Még az (M2)-es és (M4)-es egyenletrendszernél is egyszerűbben írható le a **Lorentz**-transzformáció a hiperbolikus számokkal.

A hiperbolikus számok **B. Mellékletben** bemutatott tulajdonságai alapján már magától értetődő a modell. Az (M4)-es egyenletbeli ct-nek a hiperbolikus számsík valós tengelyét, x-et, z-nek pedig a hiperbolikus képzetes tengelyt, y-t feleltetjük meg, azaz a valós tengely az időnek, a hiperbolikus képzetes tengely pedig az egyik térdimenziónak a modellje, (azaz ct→x, z→y). Ekkor a megfigyelő és a hozzá képest v sebességgel mozgó inerciarendszerbeli téridőpontok (események) viszonyára a következő összefüggést kapjuk az (M2) és (M3) figyelembevételével:

$$x' = x \cosh\Theta - y \sinh\Theta$$

(M5)

$$y' = y \cosh\Theta - x \sinh\Theta$$

Így a hiperbolikus számokra:

$$x' + \boldsymbol{k}y' = (x\cosh\Theta - y\sinh\Theta) + \boldsymbol{k}(y\cosh\Theta - x\sinh\Theta)$$

Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy:

$$x' + \boldsymbol{k}y' = (x + \boldsymbol{k}y)(\cosh\Theta - \boldsymbol{k}\sinh\Theta)$$

ahol

$$\cosh\Theta - \boldsymbol{k}\sinh\Theta$$

hiperbolikus egységvektor, így (M0) figyelembevételével:

$$x' + \boldsymbol{k}y' = (x + \boldsymbol{k}y)e^{-\Theta\boldsymbol{k}} \qquad (M6)$$

Tehát a **Lorentz**-transzformációnak a hiperbolikus számsíkon egy szorzás a megfelelője, mégpedig az eredeti számpontnak (téridő eseménynek) szorzása (M3) és (M6) figyelembevételével a $\tanh\Theta = \frac{v}{c}$ „meredekségű” egységvektor konjugáltjával.

Az (M6) egyenlet még egyszerűbb formában írható fel, ha a hiperbolikus számvektorok koordinátás alakja helyett vektoros jelölését használom, azaz

$$z = x + \boldsymbol{k}y$$

$$z' = x' + \boldsymbol{k}y'$$

jelölésekkel (M6), illetve annak átrendezéséből a következőket kapjuk a **Lorentz**-transzformáció hiperbolikus számokkal való modelljeként:

$$z' = ze^{-\Theta\boldsymbol{k}}$$

$$z = z'e^{\Theta\boldsymbol{k}}$$