Egy univerzális valószínűségszámítás felé, III., befejező rész

A valószínűségszámítás általános és egységes axiómarendszere

1. Előzmények

A cikksorozat előző két részében[1] példákon mutattam be néhány, a valószínűségszámítás problémáit taglaló, illetve harmonizálására törekvő elképzelést, kezdve **Andrei Khrennikov** kontextuális valószínűségszámításától a kétrés kísérletek kvantummechanikai (QM) „rejtélyéig". Nemcsak e cikksorozatban írtam a valószínűségszámításról, de érintettem a témát az értelmezések fontosságáról írtak során[2], valamint a kvantumhuncutságokról[3] szóló cikkeimben, és sok más írásom foglalkozott vele ilyen-olyan részletességgel[4], többek között a legutóbbi, amely Hilbert 1-es és 6-os problémáinak megoldásáról[5] szólt, és amelynek néhány lényegi eleme jelen tárgyalásom szempontjából is nélkülözhetetlen, ezért emlékeztetőül felsorolom a négy alapvetést:

1.1. A valószínűségszámítások alapképlete

Az egymást kizáró események valószínűségének összegzési szabálya a következő:

$$P = P_1 + P_2 \tag{1}$$

Ahol a P, P_1, P_2 számok nem valós számokat jelölnek, hanem kételeműeket, azaz **komplex számok a QM-ben, hiperbolikus számok a hiperbolikus kvantummechanikában[6], és parabolikus számok a klasszikus esetben**. Ezt figyelembe véve számítható[7] az (1)-ből az általános valószínűségi összegzés, amelyben már valós számokat kapok mindhárom kételemű számsíkon, és ezek az értékek a *mérhető* valószínűséget adják:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\mathrm{COS}\Theta \tag{2}$$

Itt $|\ |$ az adott – komplex, parabolikus, hiperbolikus – számsíkon definiált normát jelöli,

---

[1] Lásd https://www.infinitemath.hu/matematika/360-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-ii-resz és https://www.infinitemath.hu/matematika/356-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-i-resz

[2] Például a szuperpozícióról szóló cikkben: https://www.infinitemath.hu/filozofia/368-az-ertelmezesek-fontossagarol-ii-resz

[3] Lásd https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/tartalom/90-2016

[4] Egy régebbi írásom is a jelenlegi témát érinti: „Tér és idő helyett téridő a valószínűségszámításban", https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/324-ter-es-ido-helyett-terido-a-valoszinusegszamitasban

[5] Lásd a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[6] Elsősorban **Andrei Khrennikov** nevéhez kapcsolódik az általa hiperbolikus kvantummechanikának nevezett elmélet, amelyben a hiperbolikus számokat vonja be a valószínűségek összegzésébe. Teóriájának használhatóságát többen vitatják, de érdemes foglalkozni az elképzelésével, mert reményeim szerint egy fizikai információelmélet alapja lehet.

[7] A kételemű számokon, mint számvektorokon alkalmazott paralelogramma szabály felhasználásával adódik az eredmény.

és Θ a P_1, és P_2 számvektorok által bezárt, az adott számsíkon értelmezett szög, a COS pedig az adott számsíkon értelmezett koszinusz függvény. Fontos észrevenni, hogy mivel a parabolikus számokra az ott értelmezett koszinusz függvény azonosan egyenlő eggyel; azaz cpΘ≡1 minden Θ-ra, továbbá a parabolikus számokon értelmezett norma miatt a (2) képlet a klasszikus, azaz valós számokra felírt (1)-es összefüggéshez vezet.

1.2. A valószínűségszámítás és a téridő

Ha a teret egy dimenzióra korlátozzuk, akkor a kételemű számsíkokon, mint téridő modelleken a valós számegyenes az idővonal modellje, a számsíkok képzetes tengelye pedig a térdimenzióé. A figyelembe vett szempontok indoklását most nem részletezem, csak annyit emlékeztetőül, hogy a kételeműek egyikén, a hiperbolikus számsíkon a szorzás művelete a **Lorentz**-transzformációt[8], így a speciális relativitáselmélet alapvető téridő-összefüggését modellezi, a parabolikus (duális) számsík pedig euklideszi téridő-viszonyt tükröz, így értelemszerűen kínálkozott a feltételezés, hogy a harmadik kételemű számhalmaz, a komplex számsík is egyfajta téridő-összefüggést modellez. Ez utóbbi feltételezést alátámasztja a kétrés kísérlet és a stacionárius hatás, amelyek bizonyítékul szolgálnak arra, hogy a valószínűséget nemcsak a komplex normanégyzet, mint a valószínűségi mező „térmértéke”, de a komplex argumentummal leírt egyfajta „időmérték” is meghatározza.

1.3. A valószínűségszámítás és a kontinuumhipotézis (CH) alternatívái

A helyiértékes számábrázolás egy eddig kiaknázatlan lehetőségét használtam fel, amikor az extenzív végtelent potenciálisan végtelen helyiértékek segítségével ábrázoltam. Ez a CH-alternatíváknak „számszerűsített” feltételrendszert biztosító modelljeihez[9] vezetett, azaz a kételemű számsíkokhoz. A következőkben ezt fogom felhasználni a valószínűségszámítás általános axiómarendszerének megfogalmazásakor.

1.4. A CH- és a téridő-modellek kapcsolata

Mindent összevetve a kételemű számok mind a téridőket, mind a CH-alternatívákat modellezik. Az extenzív végtelenre megfogalmazott CH-t és alternatíváit intenzív végtelenre is értelmezve olyan kép rajzolódik elénk, amely szerint a potenciálisan végtelen valós számegyenes, mint *idővonal* minden (idő)pontjában merőlegest állítva az adott (idő)ponthoz („mosthoz”) tartozó *térként* interpretálhatóak a merőleges egyenes pontjai, amelyek a valós számegyenes (idővonal) adott (idő)pontjától 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb „időtávolságra” vannak azon a két számsíkon, ahol ilyen intenzív végtelen létezik. E modell szerint a tér mintegy „beágyazódik” az idővonal minden időpillanatába.

---

[8] Lásd ehhez *„A téridő geometriai algebrái”* című cikk (https://www.infinitemath.hu/matematika/346-a-terido-geometriai-algebrai) 3. Mellékletét, illetve a *„A szimplektikus teve „természetes előfordulásai” II.”* (https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii) 3. oldalán azt, hogy miképpen modellezhető a hiperbolikus számsíkon a **Lorentz** transzformáció.

[9] Ehhez lásd az 5. lábjegyzetbeli cikket.

2. Az általános valószínűségszámítás axiómái

A következők néhány részletét már szintén körvonalaztam a Hilbert 1-es és 6-os problémájáról[10] szóló cikkben.

Kolmogorov axiomatikus valószínűségszámítása halmazelméleti alapokon nyugszik, ami annyit jelent, hogy a valószínűségszámítás alapfogalmát, az eseményt a halmazok mintájára nem írja körül, és a közöttük definiált műveleteket is a halmazelmélet műveleteivel állítja párhuzamba[11].

A halmazelméleti megalapozást kezdetben hátránynak gondoltam, mivel az esemény-fogalom sokkal szűkebb kategória a teljesen általános halmaz-fogalomnál, ám most előnyösnek találom a halmazelméleti CH-axiómák könnyű beilleszthetősége miatt. A kételemű számok „kötelező" használata a valószínűségszámításban, ugyanakkor ezeknek a kételemű számoknak a kontinuumhipotézist modellező szerepe magától értetődően kínálja a megoldást a valószínűségszámítás harmonizálására. Nem kell mást tenni, mint kiegészíteni a kolmogorovi axiómákat a CH-alternatívák valamelyikével, pontosabban az adott CH-alternatíva számszerűsített modelljével. **Kolmogorov** nem részletezi a halmazelmélet axiómarendszerét, csak a valószínűségszámítás számára kiegészítő alapfeltevéseket közli a valószínűségszámítás axiómáiként[12], így a nem részletezett halmazelméleti axiómák közé beleérthetjük a CH alternatívák egyikét, mint axiómát, és ennek megfelelően az eseményhalmazokhoz nem valós számokat rendelünk, hanem kételemű számokat, amelyek normanégyzetét az adott esemény valószínűségének nevezzük. Ezek alapján a valószínűségszámítás módosított kolmogorovi axiómarendszere –, ahol én sem sorolom fel a halmazelmélet axiómáit a CH-ra vonatkozók kivételével, – a következő:

A helyiértékes számábrázolás lehetőségeit kihasználva a CH alternatívák és számmodelljeik a következők[13]:

CH1. **Nincs olyan szám**, amely minden természetes számnál nagyobb, ugyanakkor kisebb a $2^{\aleph_0}$-nál, ahol $\aleph_0$ a természetes számok számossága. Ez épp a Cantor-féle CH-nak megfelelő eset, és a **komplex számsík** modellezi.

CH2. **Egyetlen olyan szám van**, amely minden természetes számnál nagyobb, ugyanakkor kisebb a $2^{\aleph_0}$-nál, és vele a **parabolikus számsík**hoz, mint számmodellhez jutunk.

CH3. **Végtelen sok olyan szám van**, amely minden természetes számnál nagyobb, ugyanakkor kisebb a $2^{\aleph_0}$-nál, és vele a **hiperbolikus számsík**hoz, mint számmodellhez jutunk.

Ω az $\omega\in\Omega$ *elemi események* halmaza, F pedig Ω részhalmazainak halmaza, $f\in F$ *véletlen esemény* vagy röviden *esemény*. F tehát az *események* halmaza, Ω-t pedig az *elemi események terének* nevezzük.

Axiómák:

I. F *halmazalgebra*, azaz egyrészt $\Omega\in F$, továbbá F két halmazának uniója, metszete és különbsége F-hez tartozik. A jelöléseket lásd a **2. Melléklet**ben

[10] Lásd az 5. lábjegyzetet.
[11] Ehhez lásd a **2. Melléklet**et, amely a **Kolmogorov** által párhuzamba állított halmazelméleti és valószínűségszámítási fogalmakat mutatja be.
[12] Ehhez lásd az **1. Melléklet**et.
[13] Ennek részleteit lásd az 5. lábjegyzetbeli cikkben.

II. Ω-hoz egy és csak egy CH-axióma tartozik, azaz CH_1, CH_2, CH_3 valamelyike.

III. Minden F-beli A halmaznak megfelel egy P(A) kételemű szám, amely az Ω-hoz tartozó CH-axiómától függően komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus szám. Nevezzük P(A)-t az adott esemény *általános valószínűség*ének[14], a P(A) normanégyzetét pedig az A esemény *mérhető valószínűség*ének.

IV. $|P(\Omega)|^2=1$

V. Ha A és B diszjunktak, azaz AB=∅, akkor
P(A+B)=P(A)+P(B) és az A+B esemény valószínűségére:
$|P(A+B)|^2 = |P(A)|^2 + |P(B)|^2 + 2|P(A)||P(B)|\mathrm{COS}\Theta$
Itt $|\ |$ az adott – komplex, parabolikus, hiperbolikus – számsíkon definiált normát jelöli, és Θ a P(A), és P(B) számvektorok által bezárt, az adott számsíkon értelmezett szög, a COS pedig az adott számsíkon értelmezett koszinusz függvény.

A fenti fogalmi meghatározások és axiómák alapján, ha Ω-ra a **CH_2 kontinuum hipotézis** vonatkozik, azaz halmazaihoz **parabolikus számokat rendeltünk, akkor a klasszikus kolmogorovi valószínűségszámításhoz jutunk**, ha a parabolikus számokat azokra korlátozzuk, amelyeknek valós eleme nem negatív. Ezekre ugyanis $|P(A+B)|$, $|P(A)|$ és $|P(B)|$ pozitív valós számok, tovább cpΘ≡1 miatt a négyzetes összefüggésben, azaz $|P(A+B)|^2 = |P(A)|^2 + |P(B)|^2 + 2|P(A)||P(B)|$ egyenletben már elvégezhető a gyökvonás, és ezután megkapjuk a klasszikus $|P(A+B)|=|P(A)|+|P(B)|$ egyenletet az A és B diszjunkt eseményhalmazokra. Így a kolmogorovi matematika minden eleme változatlanul alkalmazható.

A kételeműek alapműveletei alapján a komplex és a hiperbolikus esetben is igaz a kolmogorovi matematika az *általános valószínűség*ekre vonatkozóan. Kivételt képeznek azok az összefüggések, amelyek a határértékfogalmon alapulnak, mivel ezek még kidolgozatlanok a hiperbolikus esetben, és nem használhatóak automatikusan. Természetesen mindezeket részletesen végig kell vizsgálni, de ezek már részletkérdések, és túlnőnek e rövid áttekintés keretein.

A valószínűségek számításának téridővel való kapcsolata alapján az *esemény*nek a halmaz-fogalomnál szűkebb értelmezés adható, és egy *objektum*nak a *téridő*ben bekövetkező *történése*ként interpretálható. Tulajdonképpen az *esemény*hez egy anyagi rendszer által létrehozott téridőbeli pont rendelhető *elemi esemény* esetén, nem elemi eseményeknél pedig egy téridőbeli *négyestérfogat*. Az így tekintett eseményeken a műveletek definiálása már megegyezik a kolmogorovi terminológiával. Ehhez az eseményalgebrához kell illeszteni a téridő típusát megkülönböztető, az adott CH- alternatívának megfelelő axiómát. A mechanika és a QM matematikájához a valószínűségszámítás alapfogalmának ez a téridőbeli értelmezése közelebb áll, mint a kolmogorovi halmaz-megközelítés. Az esemény hétköznapi fogalmából kiindulva is magától értetődőbb a téridő-interpretáció. Egy szó mint száz; a kételemű számok a CH alternatívákat modellezik és egyúttal háromféle téridőt is szemléltetnek, így a CH-modellek és a téridő-ábrázolások ugyanannak a matematikának az interpretációi a valószínűségszámítás axiómarendszerében.

[14] A kvantummechanikában az A eseményhez tartozó P(A)-t valószínűségi amplitúdónak nevezik, de ezt nem tartom túl szerencsésnek a kételeműek téridő összefüggése miatt. A teljes valószínűség (angolul total probability) fogalma már foglalt volt egy másik összefüggésre vonatkozóan, ezért választottam egy hasonlóan átfogó értelmű kifejezést; az *általános valószínűség*et (angolul lehetne pl. global probability).

3. Összegzés

Cikksorozatom első részében bemutattam **Khrennikov** QM-re vonatkozó kontextuális valószínűségszámítását, amelynek formalizmusa megegyezett a kolmogorovi matematikával, kiegészítve a statisztikus adatok okozta eltérési összetevővel. Az eltérési faktor koszinusz függvényének meghatározott szabályszerűsége azonban konkrétabb okot sejtet egy statisztikus hibaszázaléknál. A fenti modell ezt a valódi okot nevezi meg, és egyúttal megadja egy univerzális – és a kolmogorovihoz hasonlóan halmazelméletre alapozott – axiómarendszert a valószínűségszámításban. Kifogásolhatnánk, hogy a CH-alternatívákra alapozott új axiómarendszer túlságosan „matematikai" választ ad arra a kérdésre, hogy miképp ágazik háromfelé a valószínűségszámítás matematikája. Ellenben a kételemű számok segítségével a CH-alternatíváknak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető téridő modellek már nemcsak a halmazelmélettel, de a fizika alapfogalmaival hozzák összefüggésbe a valószínűségszámítás elágazódásának az okát. A QM matematikája jelenleg nem ezek ismeretére alapozza a valószínűségszámítással kapcsolatos állításait, hiszen egy klasszikus téridő hátterén fogalmazza meg a törvényszerűségeit. Ez a módszer nemcsak bonyodalmakat okoz, de hibákat is rejt, ezért a jelenlegi ismeretek alapján újra kell fogalmazni a QM matematikáját, azaz háttérfüggetlenül, a dinamikusan változó téridő-modellek felhasználásával kell kialakítani az eszközrendszerét. Ez azonban már más történet, és nem ennek az írásnak a témája. A későbbiekben erről is szeretnék majd írni.

1. Melléklet

A valószínűségszámítás kolmogorovi axiómái[15]

Ω az ω∈Ω *elemi események* halmaza, F pedig Ω részhalmazainak halmaza, f∈F *véletlen esemény* vagy röviden *esemény*. F tehát az *események* halmaza, Ω-t pedig az *elemi események terének* nevezzük.

Axiómák:

I. F *halmazalgebra*, azaz Ω∈F és az F két halmazának uniója, metszete és különbsége az F-hez tartozik. A jelöléseket lásd a **2. Melléklet**ben
II. Minden F-beli A halmaznak megfelel egy P(A) nemnegatív valós szám. Ezt a számot az A esemény *valószínűség*ének nevezzük.
III. P(Ω)=1
IV. Ha A és B diszjunktak, azaz AB=∅, akkor
P(A+B)=P(A)+P(B)

Az I-IV. axiómákat kielégítő (Ω, F, P) objektumot *valószínűségi mező*nek fogjuk nevezni.

Ezen axiómák rendszere *ellentmondásmentes*, de *nem teljes*. **Kolmogorov** a rendszer nem teljes voltát abban látja, hogy *„különböző valószínűségszámításokban különböző valószínűségi mezőket vesznek figyelembe”*[16].

[15] Forrás: **A. N. Kolmogorov**, *A valószínűségszámítás alapfogalmai*, Hungarian translation © **Zibolen Endre**, Typotex, 2010
[16] Lásd a 15. lábjegyzetbeli forrás 13. oldalát.

2. Melléklet

Az alábbi idézet **Kolmogorov** *„A valószínűségszámítás alapfogalmai”*[17] című művéből való, ahol Ω azon ω elemek halmaza, amelyeket elemi eseményeknek nevezünk, a nagybetűvel jelöltek pedig Ω részhalmazai.

Halmazelméletben	*Véletlen eseményekre*
1. A és B diszjunktak, azaz $AB = \emptyset$.	1. A és B események kizárják egymást.
2. $AB \ldots N = \emptyset$.	2. $A, B, \ldots, N$ események kizárják egymást.
3. $AB \ldots N = X$.	3. X esemény valamennyi $A, B, \ldots, N$ esemény egyidejű megvalósulásából áll.
4. $A \cup B \cup \ldots \cup N = X$.	4. X esemény $A, B, \ldots, N$ események legalább egyikének a bekövetkezését jelenti.
5. $\bar{A}$ komplementer halmaz.	5. $\bar{A}$ az A esemény be nem következését jelentő ellentett esemény.
6. $A = \emptyset$.	6. A lehetetlen esemény.
7. $A = \Omega$.	7. A-nak szükségszerűen be kell következnie.
8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok $\mathfrak{A}$ rendszere az Ω halmaz *felbontása*, ha $$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega,$$ ahol feltesszük, hogy az A_i halmazok páronként diszjunktak. (A + jelet csak diszjunkt halmazok egyesítésére fogjuk használni.)	8. Az $\mathfrak{A}$ *kísérlet* abból áll, hogy megállapítjuk: az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül melyik következik be; ebben az esetben $A_1, A_2, \ldots, A_n$-t az $\mathfrak{A}$ kísérlet lehetséges kimeneteleinek nevezik.
9. B az A részhalmaza: $B \subseteq A$.	9. B esemény megvalósulásából szükségszerűen következik A megvalósulása.

[17] Lásd a 15. lábjegyzetbeli forrásban a 17. oldalt.