Téridő-modellek és a kételemű számok

Gyorsulásmentes mozgás-modellek a kételeműek számsíkjain [1]

„Két mennyiséget elosztani egymással puszta számolás; a matematika azt kitalálni, hogy mit osszunk mivel.”
(**Jordan Ellenberg**, *Ne tévedjünk*)[2]

Belefogtam a differenciál- és integrálszámítás fogalmainak tisztázásába a kételemű számokon, természetesen a komplex számok kivételével, hiszen annak analízise egy jól kidolgozott területe a matematikának. Kezdett túl hosszú lenni a kalkulusról[3] szóló cikk, ezért az előzményeit, pontosabban a kételemű számoknak azokat a fontos összefüggéseit –, amelyek megalapozzák analízisüket – jelen írásomban foglalom össze. Az itt szereplő összefüggések egy része már szerepelt korábbi cikkeimben, de most a differenciál- és integrálszámítás kontextusában, annak előkészítésére sorakoztattam fel a matematikai alapokat, kiegészítve újakkal és értelmezésükkel.

1. Bevezetés

Gyorsulásmentes esetben a tér leszűkíthető egy dimenzióra a modellezésben, így a kételemű számok közül mind a parabolikus számok, mind a hiperbolikusok téridőt modelleznek. A parabolikus számsíkon a számok szorzása a **Galilei**-transzformációt, a hiperbolikusoknál a **Lorentz**-transzformációt modellezi.[4] Így logikus annak feltételezése, hogy a parabolikus és hiperbolikus számok „testvérei”, a komplex számok is speciális téridőt modelleznek. A „testvér” komplex szám azonban egy alapvető pontban eltér mind a hiperbolikustól, mind a parabolikustól, ugyanis a komplex képzetes az aktuális végtelen hiányát jelöli, szemben az aktuális végtelent modellező parabolikus és hiperbolikus képzetessel. A komplexek téridőt modellező szerepét tekintve ez jelentheti azt, hogy a komplexeknél tapasztalatilag nem különbözik a tér az időtől, hiszen a tér az idő aktuális végtelenjét modellezi, ha pedig az utóbbi – tehát az aktuális végtelen – hiányzik, akkor az előbbiek – tér és idő – „egyívásúak”. „*Elég lehetetlen leírni azt, amin túl tér, idő és anyag elveszítik különálló identitásukat s egymás ruháját kezdik hordani*.”[5] A tréfát félretéve, a komplexeknél a tértől nem különböző idő abban is megnyilvánul, hogy a komplex szám normája, másnéven abszolútértéke megegyezik a vektoralgebra vektorjainak abszolútértékével, amely vektorok koordinátatengelyei egyenértékűek, azaz a tapasztalatot modellezve megkülönböztethetetlenek.

---

[1] A kételemű számok alaptulajdonságait lásd a **Melléklet**ben.
[2] „*Dividing one number by another is mere computation; figuring out what you should divide by what is mathematics.*” (**Jordan Ellenberg**, *How not to be wrong*)
[3] Rövidségük miatt mind az analízis, mind a kalkulus kifejezést használni fogom „differenciál- és integrálszámítás” matematikáját jelölve.
[4] Lásd „*A Galilei transzformáció és a parabolikus számok*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok
[5] Nem tudtam ellenállni annak a késztetésnek, hogy itt **Terry Pratchett**-et idézzek a „*Bűbájos bajok*”-ból.

Richard P. Feynman (1918-1988) nem nevezi nevén a komplex téridőt, de épp ezt írja körül a QED-et leíró – azaz a kvantumelektrodinamika pályaintegrál módszerét magyarázó – könyvében[6], amikor érthetően elmagyarázza, hogy miképp összegződnek egy adott kvantum-esemény különböző megvalósulásainak a valószínűségei, világossá téve, hogy miképp kell számításba venni a komplex amplitúdónégyzet mellett a komplex argumentumot is, amelyet időként interpretál. Összefüggésben van a komplexek fent említett „homogén" térideje **Feynmannak** azokkal a meglátásaival is, amelyeket a fény mikrotéridőbeli viselkedésével kapcsolatban fogalmazott meg: a minden utat bejáró és bármely sebességgel haladni képes fényről. Tehát annak, amelynek fizikáját **Feynman** leírja a QED-ben, annak a matematikáját két dolog határozza meg: egyrészt a komplex képzetes aktuális végtelen-hiányt ábrázoló volta, amely összemos teret és időt, másrészt a komplex számsík, mint téridő modellben a korlátlan értékkészletű tangensfüggvény, mint sebesség-modell.

2. Gyorsulásmentes sebességmodellek a kételeműek számsíkjain

A kételemű számok tehát téridőt modelleznek, és a valós számtengely az időt, a képzetes koordinátatengely a teret modellezi, így adott a gyorsulásmentes egyenesvonalú mozgás esetén a sebesség klasszikus – differenciálszámítást sem igénylő – definiálása, azaz térbeli távolság osztva a megtett út alatt eltelt idővel. Mindez a számsíkon egy számvektor meredekségét jelenti. Felhasználva a kételemű számoknak a **Melléklet**ben vázolt tulajdonságait a következő adódik:

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

Ahol x és y valós számok, $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq0$, $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}=\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi}$, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}=\mathbf{th}\boldsymbol{\tau}$ bevezetésével[7] a következőt kapom:

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \tag{2}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) \quad \text{a parabolikus számoknál} \tag{3}$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{4}$$

Látható, hogy egyedül a parabolikus számoknál marad meg a sebesség klasszikus „tér-per-idő" értelmezése egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén. Ezeket sebességfogalmakat fogom most áttekinteni.

2.1. Sebességmodell a hiperbolikus számsíkon

Mindig élek azzal a lehetőséggel, hogy gyorsulásmentes egyenesvonalú mozgás esetén a tér leszűkíthető egy dimenzióra[8] a modellezésben, így a hiperbolikus számsíkon modellezett – a speciális

---

[6] Lásd ehhez „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*" című cikk. 4. pontját: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa valamint a következő könyvet: **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

[7] Lásd erről a **Melléklet**et.

[8] **Feynman** így ír erről: „*... a legáltalánosabb Lorentz-transzformáció meglehetősen bonyolult, mivel mind a négy koordinátát kombinálja. Mi továbbra is az egyszerűbb alakot fogjuk használni, mivel a relativitás valamennyi lényeges*

relativitáselméletben leírt – téridőben is a valós számtengely az időt, a komplex koordinátatengely a teret szemlélteti.

Amint a (4)-es képlet mutatja; a hiperbolikus számsíkon egy *hiperbolikus-tangens*függvényt kapunk a sebesség modellezésére[9], és e sebesség additivitási szabályát fogom itt bemutatni. E törvényszerűséget pedig a valóság visszaigazolja.

1. Megjegyzés

Felmerülhet valakiben, hogy miért épp a hiperbolikus-tangensfüggvényt vezettük be a (4)-es képletben. Gondolhatunk például arra, hogy ezt a hiperbolikus és trigonometrikus függvények közötti kapcsolat indokolja; figyelembe véve a történetileg évszázadokkal korábban kialakított komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakját. Ezek figyelembevételével belátható a hiperbolikus-tangensfüggvény bevezetésének szükségszerűsége.

Legyen K és K' két rendszer, amelyet a hiperbolikus számsíkon ábrázolok. Legyen a K rendszer maga a hiperbolikus számsík koordinátarendszere, a K' rendszer pedig a K-hoz képest $\frac{y_0}{x_0} = \tanh \tau_0$ sebességgel halad. Legyen a K rendszerben egy z=x+**k**y pont, amely a K rendszerhez képest $\frac{y}{x} = \tanh \tau = v$ sebességgel halad, a K' rendszerben ezt a pontot z'=x'+**k**y' írja le és ez a K'-höz képest $\frac{y'}{x'} = \tanh \tau' = v'$ sebességgel mozog.

2. Megjegyzés

A klasszikus irodalom K'-t vonatként, később űrhajóként érzékelteti, a mozgó pontot pedig a vonatban vagy az űrhajóban mozgó objektumként kell elképzelni.

A K és a K' rendszer között a koordinátaösszefüggések – azaz a **Lorentz**-transzformáció modellje a hiperbolikus számsíkon – a következő[10]:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \tau_0 - y \sinh \tau_0 \\ y' &= y \cosh \tau_0 - x \sinh \tau_0 \end{aligned} \tag{5}$$

és

$$\begin{aligned} x &= x' \cosh \tau_0 + y' \sinh \tau_0 \\ y &= y' \cosh \tau_0 + x' \sinh \tau_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Tehát mindez a kételemű számokkal kifejezve azt jelenti, hogy a z'=x'+**k**y' pont a **Lorentz**-transzformációval a következő:

$$z' = (x \cosh \tau_0 - y \sinh \tau_0) + \boldsymbol{k}(y \cosh \tau_0 - x \sinh \tau_0)$$

Hasonlóan a z=x+**k**y pont transzformáltja az alábbi:

---

vonását tartalmazza." (**Richard Feynman**, *Mai Fizika 2 – Relativisztikus mechanika – Forgó és rezgőmozgás*, 22. oldal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968)

[9] Lásd ehhez „*A Galilei transzformáció és a parabolikus számok*" című cikk C. Mellékletének (M3) képletét: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

[10] Lásd ehhez „*A Galilei transzformáció és a parabolikus számok*" című cikk C. Mellékletét: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

$$z = (x' \cosh\tau_0 + y' \sinh\tau_0) + \boldsymbol{k}(y' \cosh\tau_0 + x' \sinh\tau_0)$$

Könnyen belátható, hogy e transzformációk egységvektorral való szorzást jelentenek a hiperbolikus számsíkon, azaz:

$$z' = z(\cosh\tau_0 - \boldsymbol{k}\sinh\tau_0)$$
$$z = z'(\cosh\tau_0 + \boldsymbol{k}\sinh\tau_0) \tag{7}$$

Exponenciális alakkal felírva:

$$z' = ze^{-\tau_0\boldsymbol{k}}$$
$$z = z'e^{\tau_0\boldsymbol{k}} \tag{8}$$

Ne feledjük, az x és x' koordináták az időkoordináták, az y és y' pedig a térbeli koordináták modelljei, így a sebességek a következők:

$$v' = \frac{y'}{x'} = \frac{y \cosh\tau_0 - x \sinh\tau_0}{x \cosh\tau_0 - y \sinh\tau_0} \tag{9}$$

A $v = \frac{y}{x} = \tanh\tau$ alapján y=xv=x (tanh τ) összefüggést a (9) egyenletben felhasználva, majd $(x \cosh\tau_0)$-vel osztva – ahol $\cosh\tau_0$ sohasem 0, x-ről pedig feltesszük, hogy nem 0 – a következőt kapjuk:

$$v' = \frac{x \tanh\tau\cosh\tau_0 - x \sinh\tau_0}{x \cosh\tau_0 - x\tanh\tau \sinh\tau_0} = \frac{\tanh\tau - \tanh\tau_0}{1 - \tanh\tau \tanh\tau_0} \tag{10}$$

Tehát:

$$v' = \frac{\tanh\tau - \tanh\tau_0}{1 - \tanh\tau \tanh\tau_0} = \frac{v - v_0}{1 - v\, v_0} \tag{11}$$

Hasonlóan juthatunk a következőre:

$$v = \frac{\tanh\tau' + \tanh\tau_0}{1 + \tanh\tau' \tanh\tau_0} = \frac{v' + v_0}{1 + v'\, v_0} \tag{12}$$

Azaz a sebességek nem a klasszikus módon adódnak össze, hanem a *hiperbolikus-tangens*függvény függvényváltozójának additivitása szerint, hiszen például a (12) egyenlet alapján a következő igaz:

$$v = \tanh\tau = \frac{\tanh\tau' + \tanh\tau_0}{1 + \tanh\tau' \tanh\tau_0} = \tanh(\tau' + \tau_0) \tag{13}$$

2.2. Sebességmodell a parabolikus számsíkon

A (3) alapján a parabolikus számoknál megmarad a sebességek klasszikus „tér/idő” összefüggése, és a parabolikus számok szorzásával a **Galilei**-transzformációt modellezve az egyenesvonalú és gyorsulásmentes sebességösszegzés klasszikus additivitását kapjuk.[11]

[11] Lásd ehhez „*A Galilei transzformáció és a parabolikus számok*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

Mozogjon a K' rendszer egyenesvonalú egyenletes mozgással, és v_0 sebességgel a K rendszerhez képest, amely itt a parabolikus számsík koordinátarendszerének felel meg. Az x koordinátatengely jelölje az időt, az y pedig a teret. Ha a két rendszer eredetileg egybeesett, azaz origójuk azonos, akkor a **Galilei**-transzformáció szerint:

$$y' = y - v_0 x \qquad x' = x \tag{14}$$

Ne feledjük hát, hogy y egy térbeli irány, x pedig az idő modellje!

A parabolikus számsíkon modellezve a rendszereket, legyen a K rendszerben egy z=x+**j**y pont, amely a K rendszerhez képest $\frac{y}{x} = v$ sebességgel halad, a K' rendszerben ezt a pontot z'=x'+**j**y' írja le és a K'-höz képest $\frac{y'}{x'} = v'$ sebességgel mozog.

Így:

$$x' + jy' = x'\left(1 + \mathbf{j}\frac{y'}{x'}\right) = x'(1 + \mathbf{j}v') \tag{15}$$

A (15) egyenletben a (14) összefüggéseit, valamint a parabolikus számok tulajdonságait felhasználva:

$$x'(1 + \mathbf{j}v') = x' + jy' = x + j(y - v_0 x) = x\left(1 + \mathbf{j}\left(\frac{y}{x} - v_0\right)\right) = x'\big(1 + \mathbf{j}(v - v_0)\big) \tag{16}$$

Tehát a parabolikus számsíkon valóban a klasszikus sebességösszegzés modelljét kaptuk:

$$v' = v - v_0 \tag{17}$$

A (14) összefüggéseit, valamint a parabolikus számok tulajdonságait felhasználva a fentiekből könnyű levezetni, hogy a **Galilei**-transzformáció itt is egységvektorral való szorzást jelent, csak itt egy parabolikus egységvektor a szorzótényező:

$$z' = z e^{-v_0 \mathbf{j}} \qquad z = z' e^{v_0 \mathbf{j}} \tag{18}$$

2.3. Sebességmodell a komplex számsíkon

A komplex számoknál a sebességre egy tangensfüggvényt kapok. Mivel a komplex téridő még nem vizsgált a fizikában, hiszen a komplex számok téridőt modellező szerepét sem fedezte fel a fizika, ezért ezt a sebességösszefüggést még nem igazolták tapasztalatilag, de matematikája korrekt és a következőkben ezt mutatom be.

Most is gyorsulásmentes egyenesvonalú mozgást végző rendszerek közötti összefüggéseket vizsgálok, és a teret leszűkítem egy dimenzióra a modellezésben, így a komplex számsíkon modellezett téridőben is a valós számtengely az időt, a komplex koordinátatengely a teret modellezi.

Amint a (2)-es képlet mutatja; a komplex számsíkon egy tangensfüggvényt kapunk a sebesség modellezésére. E sebesség additivitási szabályát egyelőre csak matematikailag tudjuk bemutatni, ami nem más, mint a tangensfüggvény függvényváltozójának additivitása szerinti összegzés. Ezt mutatom be az alábbiakban.

Legyen K és K' két rendszer, amelyeket a komplex számsíkon ábrázolok. A K rendszer maga a komplex számsík koordinátarendszere. A K' rendszer a K-hoz képest $\frac{y_0}{x_0} = \tan\tau_0$ sebességgel halad. Legyen a K rendszerben egy z=x+**i**y pont, amely a K rendszerhez képest $\frac{y}{x} = \tan\tau = v$ sebességgel halad, a K' rendszerben ezt a pontot z'=x'+**i**y' írja le és a K'-höz képest $\frac{y'}{x'} = \tan\tau' = v'$ sebességgel mozog.

Tapasztalati bizonyíték híján egyelőre csak matematikai összefüggés, hogy a K és a K' rendszer között a koordinátaösszefüggések a következők a komplex számsíkon:

$$x' = x\ \cos\tau_0 + y\ \sin\tau_0$$

(19)

$$y' = y\ \cos\tau_0 - x\ \sin\tau_0$$

és

$$x = x' \cos\tau_0 - y' \sin\tau_0$$

(20)

$$y = y'\ \cos\tau_0 + x' \sin\tau_0$$

Tehát mindez a kételemű számokkal kifejezve azt jelenti, hogy a z'=x'+**i**y' pontra a fenti transzformációt alkalmazva z' a következő:

$$z' = (x\ cos\,\tau_0 + y\ sin\,\tau_0) + \boldsymbol{i}(y\ cos\,\tau_0 - x\ sin\,\tau_0)$$

Hasonlóan a z=x+**k**y pont transzformáltja az alábbi:

$$z = (x'\ \cos\tau_0 - y'\ \sin\tau_0) + \boldsymbol{i}(y'\ \cos\tau_0 + x'\ \sin\tau_0)$$

Könnyen belátható, hogy e transzformáció is egységvektorral való szorzást jelent, de most a komplex számsíkbeli egységvektort értve, azaz:

$$z' = z(\cos\tau_0 - \boldsymbol{i}\sin\tau_0)$$

(21)

$$z = z'(\cos\tau_0 + \boldsymbol{i}\sin\tau_0)$$

Exponenciális alakkal felírva:

$$z' = ze^{-\tau_0\boldsymbol{i}}$$

(22)

$$z = z'e^{\tau_0\boldsymbol{i}}$$

Most se feledjük, az x és x' koordináták az időkoordináták, az y és y' pedig a térbeli koordináták modelljei.

Ezek után a sebességek a következők:

$$v' = \frac{y'}{x'} = \frac{y\ \cos\tau_0 - x\ \sin\tau_0}{x\ \cos\tau_0 + y\ \sinh\tau_0} \qquad (23)$$

A $v = \frac{y}{x} = \tan\tau$ alapján y=xv=x (tan τ) összefüggést a (23) egyenletben felhasználva, majd $(x\ \cos\tau_0)$-vel osztva – ahol feltesszük, hogy x és $\cos\tau_0$ nem 0 – a következőt kapjuk:

$$v' = \frac{x\ \tan\tau\cosh\tau_0 - x\ \sin\tau_0}{x\ \cos\tau_0 + x\tan\tau\ \sin\tau_0} = \frac{\tan\tau - \tan\tau_0}{1 + \tan\tau\ \tan\tau_0} \qquad (24)$$

Tehát:

$$v' = \frac{\tan\tau - \tan\tau_0}{1 + \tan\tau\ \tan\tau_0} = \frac{v - v_0}{1 + v\, v_0} \tag{25}$$

Hasonlóan juthatunk a következőre:

$$v = \frac{\tan\tau' + \tan\tau_0}{1 - \tan\tau'\ \tan\tau_0} = \frac{v' + v_0}{1 - v'\, v_0} \tag{26}$$

Azaz a sebességek nem a klasszikus módon adódnak össze, hanem a tangensfüggvény függvényváltozójának additivitása szerint, hiszen például a (26) egyenlet alapján a következő igaz:

$$v = \tan\tau = \frac{\tan\tau' + \tan\tau_0}{1 - \tan\tau'\ \tan\tau_0} = \tan(\tau' + \tau_0) \tag{27}$$

És valóban, a komplex számsíkon is szorzásnál az argumentumok összeadódnak, azaz a szorzat argumentuma a tényezők argumentumainak összege, tehát a (27)-es egyenlet komplex számok szorzásából adódó sebességösszegzést, ugyanakkor egy *téridőbeli* forgást mutat.

Bár azt írtam korábban, hogy a komplex számok téridőt modellező szerepe tapasztalatilag nem igazolt, pontosabban, hogy *nem vizsgált* ez a téridő, de ez nem teljesen igaz, hiszen az interferencia jelensége jól vizsgált a fizikában, még ha *értelmezése* máig vita tárgya. A kvantummechanika (QM) valószínűségi modelljébe épp azért kerültek be a komplex számok, mert velük tökéletesen leírhatóak voltak a tapasztalatok. Így a komplex számok szerepe tapasztalatilag igazolt a kvantumvilágban, csak a *téridő-értelmezésük* hiányzik. Tehát nem egy tapasztalat, hanem egy értelmezés hiányzik, amit viszont épp itt fogalmaztam meg. Így azt állítom, hogy a sebességösszegzés tangens-szabályát, ha nem is direktben, de áttételesen igazolják azok a tapasztalatok, amelyet **Feynman** a fény mikrotéridőbeli tulajdonságairól leírt[12], azaz kvantumszinten a fénysebességnek nincs határa, és nem létezik a másik korlát sem, azaz a fény egyenesvonalú terjedése sem törvényszerű.

Nagyon fontos észben tartani, hogy a gyorsulásmentes **egyenesvonalú mozgás a *térbe*n egyenesvonalúra vonatkozik**, amely **a *téridőben* nem egyenesvonalú**, hiszen a hiperbolikus esetben egy <u>*téridőbeli* hiperbolán</u> való mozgást (**Lorentz**-transzformációt) ábrázol, egyedül a parabolikus esetben mutat szintén <u>*téridőbeli* egyenes</u> mentén való elmozdulást (**Galilei**-transzformációt), a komplex téridőben pedig egy <u>*téridőbeli* körmozgás</u>t.

Visszatérve a komplex téridő sebességösszegzésében a tangens-szabályra, magyarázatra szorul, miképp függ ez össze a két korlát – a sebességhatár és a térbeli egyenesvonalú terjedés – hiányával kvantumszinten. Hogy **a fénysebességnek nincs határa kvantum szinten, az a sebesség tangensfüggvény voltával áll kapcsolatban**. A tangensfüggvényből, mint sebesség-modellből következik a sebesség korlátlan volta, de fordítva a sebesség korlátlan voltából a parabolikus eset is adódhatna. A sebesség korlátlan volta és a klasszikus összegzési szabály hiányából már következik a tangens-szabály a sebesség-összegzésre. A *térben* egyenesvonalú terjedés törvényszerűségének hiánya a komplex képzetesnek az aktuális végtelen hiányát modellező voltával áll kapcsolatban, tehát azzal, hogy **az aktuális végtelen *hiánya* a komplexeknél a tapasztalatilag nem különböző teret** és **időt** szemlélteti. Így a fenti bekeretezett figyelemfelhívás alapján megkülönböztethetetlen a térben

[12] Lásd erről: **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

egyenesvonalú az időben egyenesvonalútól, magyarán **tapasztalatilag nem különböztethető meg a térben egyenesvonalú mozgás a tetszőleges térbeli pályától kvantumszinten**. Szemléletessé teheti ezt a téridőt az a tulajdonsága is, hogy ugyan tetszőleges lehet a mérete, de aktuálisan csak véges lehet, hiszen épp azt modellezi, amikor nincs aktuális végtelen. A sebesség korlátlan volta is azt jelenti, hogy ugyan tetszőlegesen nagy lehet, de aktuálisan mindig véges. Mindezek matematikájából már következnek a **Feynman** által megfogalmazott tapasztalatok: egyrészt a sebességkorlát hiánya, másrészt a fény pályájának tetszőleges volta, ami abból következik, hogy a tér/idő végessége és a sebesség tetszőlegesen nagy volta miatt kvantumszinten a téridő minden pontját nemnulla valószínűséggel járja be a fény.

Ne tévedjünk! Változatlanul inerciarendszerekről van szó itt is, azaz a *térben* egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgással mozgó (gyorsulásmentes) rendszerek közötti transzformációkról. Erre a komplex téridőben is igaz az, amit már a hiperbolikus téridővel, azaz a **Lorentz**-transzformáció kapcsán egy korábbi cikkemben[13] megfogalmaztam, hogy az egyik rendszerből klasszikus méréssel nem ellenőrizhetőek a másikban mérhető téridőbeli távolságok. Csak fény – vagy egyéb közvetítő – útján és matematikai számításokkal szerezhető információ a másik rendszerről. Így a **Lorentz**- és a **Galilei**-transzformáció mellett a komplex *téridőbeli körmozgásról* látással szerzett információ sem más, mint egy *téridő-perspektíva* az egyik rendszerből a másikra tekintve – itt a klasszikus méreteink világából a kvantumok világát figyelve – amely során a látás-tapasztalatok éppúgy nem az igazi méreteket mutatják, ahogy a térben távoli tárgyak perspektivikus mérete sem.

3. A sebességmodellek, mint a külső és belső szorzatok hányadosai

A kételemű számok és a geometriai algebra összefüggéseit vizsgálva definiáltam a kételeműeken is a geometriai szorzathoz hasonlót egy skaláris és egy ferde-skaláris szorzat segítségével.

3.1. Emlékeztetőül a szorzatok definíciói

Az egyenletekben a $\overline{z_1}$ a z_1 szám konjugáltját jelenti, Re pedig egy kételemű szám valós, Im pedig a képzetes részét jelöli.

SKALÁRIS VAGY BELSŐ SZORZAT

Hiperbolikus számsík:

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| \cosh(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 \tag{28}$$

Parabolikus számsík:

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| = x_1 x_2 \tag{29}$$

Komplex számsík:

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| \cos(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{30}$$

[13] Lásd a „*Szimmetriák és téridők*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/426-szimmetriak-es-teridok

A kételemű számokra a skaláris szorzat általánosan a következő:

$$\boldsymbol{\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}||z_2|\,\mathrm{COS}(\tau_2 - \tau_1) = x_1x_2 - \delta^2 y_1y_2} \qquad \mathbf{(31)}$$

Ahol COS az adott számsíkon definiált koszinusz-függvényt jelöli, és **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó.

FERDE-SKALÁRIS SZORZAT:

Hiperbolikus számsík:

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\bar{z_1}z_2) = |\bar{z_1}||z_2|\,sinh(\tau_2 - \tau_1) = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad (32)$$

Parabolikus számsík [14]:

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\bar{z_1}z_2) = |\bar{z_1}||z_2|(sp\arg z_2 - sp\arg z_1) = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad (33)$$

Komplex számsík:

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\bar{z_1}z_2) = |\bar{z_1}||z_2|\sin(\tau_2 - \tau_1) = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad (34)$$

A kételemű számokra a ferde-skaláris szorzat általánosan a következő:

$$\boldsymbol{\omega(z_1, z_2) = Im(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}||z_2|\,\mathrm{SIN}(\tau_2 - \tau_1) = x_1y_2 - x_2y_1} \qquad \mathbf{(35)}$$

Ahol SIN az adott számsíkon definiált szinusz-függvényt jelöli.

GEOMETRIAI SZORZAT:

$$\Pi(z_1, z_2) = \bar{z_1}z_2 = \langle z_1, z_2\rangle + \boldsymbol{\delta}\,\omega(z_1, z_2) \qquad (36)$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\langle z_1, z_2\rangle$ a skaláris, $\omega(z_1, z_2) = x_1y_2 - x_2y_1$ a ferde-skaláris szorzat az adott kételemű számsíkon.

3. Megjegyzés

Első látásra a geometriai szorzat zavarba ejtő lehet két okból is.

- Egyfelől a definícióban szereplő szorzatban az egyik kételemű tényező konjugáltja szerepel, de egy szám konjugáltjának a konjugáltja a számmal azonos, így például $\boldsymbol{\Pi(\overline{z_1}, z_2) = \overline{\overline{z_1}}z_2 = z_1z_2 = \langle\overline{z_1}, z_2\rangle + \delta\,\omega(\overline{z_1}, z_2)} = Re(\boldsymbol{z_1z_2}) + \boldsymbol{\delta}Im(\boldsymbol{z_1z_2})$. Tehát tetszőleges kételemű szorzat felírható geometriai szorzatként.
- Másfelől a kételeműek szorzata kommutatív, ez igaz a geometriai szorzat definíciójában szereplő szorzatra is. A geometriai szorzatban a számok konjugációja az, ami nem felcserélhető, pontosabban felcserélés esetén előjelet vált a szorzat, azaz: $\boldsymbol{\Pi}(z_1, z_2) = \boldsymbol{\overline{z_1}z_2} = \boldsymbol{-z_1\overline{z_2}} = -\,\Pi(z_2, z_1)$. Tehát a geometriai szorzatot definiáló $\boldsymbol{\Pi}$ függvényben nem szabad felcserélni a változókat, pontosabban a csere előjel-változással jár. Ugyanis a $\boldsymbol{\Pi}$ függvényben a változók sorrendje határozza meg, hogy közülük az első konjugáltja szerepel a szorzatban: $\boldsymbol{\Pi}(z_1, z_2) = \boldsymbol{\overline{z_1}z_2}$.

[14] A kevésbé ismert parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekről lásd a Mellékletet.

KÜLSŐ SZORZAT:

A geometriai szorzat (36) és a ferde-skaláris szorzat (32), (33), (34) definícióinak felhasználásával a külső szorzatok a következők:

Hiperbolikus számsík:

$$z_1 \wedge z_2 = \boldsymbol{k}\,\omega(z_1, z_2)\ ahol\ \ \boldsymbol{k}^2 = 1, \mathbf{k} \neq 1 \tag{37}$$

Parabolikus számsík:

$$z_1 \wedge z_2 = \boldsymbol{j}\,\omega(z_1, z_2)\ ahol\ \boldsymbol{j}^2 = 0, \mathbf{j} \neq 0 \tag{38}$$

Komplex számsík:

$$z_1 \wedge z_2 = \boldsymbol{i}\,\omega(z_1, z_2)\ ahol\ \boldsymbol{i}^2 = -1 \tag{39}$$

A kételemű számokra a külső szorzat általánosan a következő:

$$\boldsymbol{z_1} \wedge \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) \tag{40}$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1**, j**^{2}=0**, j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\omega(z_1, z_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ ferde-skaláris szorzat mindhárom kételemű számsíkon.

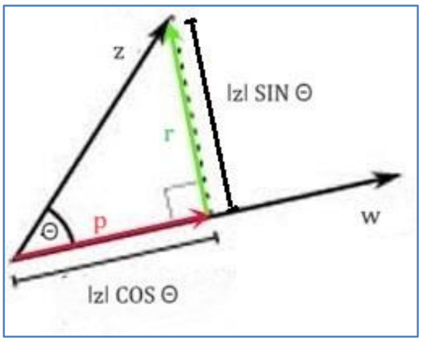
A külső szorzatokat felhasználva a geometriai szorzat a következő mindhárom számsíkon:

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) = \overline{\boldsymbol{z_1}}\boldsymbol{z_2} = \langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \rangle + \boldsymbol{z_1} \wedge \boldsymbol{z_2} \tag{41}$$

3.2. A skaláris szorzat algebrája és geometriája

A skaláris szorzat az euklideszi geometriában két hasznos tulajdonsággal bír, és ugyanezekkel a tulajdonságokkal a kételeműek számvektorai is rendelkeznek.

Egyrészt **egy vektor önmagával vett skalárszorzata a vektor hosszának négyzete**, számvektor esetén a hossz alatt a számvektor normáját, más kifejezéssel abszolútértékét kell érteni. Ennek belátása triviális a definíciók alapján.



1. ábra

Másrészt **a skalárszorzatot geometriailag úgy lehet értelmezni, mint két vektor esetén az egyiknek a másik irányába eső vetületének ez utóbbival való skaláris szorzatá**t. Lásd ehhez az **1. ábrát**, ahol „piros” **p** vektor jelöli a **z** vektor **w**-re való vetületét, és a $\langle \boldsymbol{z}, \mathbf{w} \rangle$ skaláris szorzat egyenlő a **p** vektor és **w** skaláris szorzatával, azaz:

$$\langle \boldsymbol{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle \boldsymbol{p}, \mathbf{w} \rangle \tag{42}$$

Mindez nemcsak az **1. ábrán** bemutatott euklideszi síkon igaz, de a kételeműek számsíkjain is. Ennek belátása könnyű, de nem triviális, mivel **el kell tekintenünk az ábrának a klasszikus merőlegességet sugalló jellegétől, hiszen a számsíkok geometriája különbözik az euklideszitől**. Meg kell hát vizsgálni, mit jelent e számsíkokon a merőlegesség.

A merőlegesség azonosan definiált mindhárom számsíkon; azaz **két számvektort akkor nevezem merőlegesnek, ha a skalárszorzatuk nullával egyenlő**. A különbözőségek pedig a skalárszorzatok eltéréseiből adódnak. Egyedül a komplex számsíkon kapunk olyan merőlegesség fogalmat – π/2-vel forgatást – amely megegyezik az intuitív képünkkel. A hiperbolikus számsíkon az egymásra merőleges vektorok egyenesei az egységhiperbolák aszimptotájára tükrözöttek, a parabolikus számsíkon pedig a képzetes számtengelyre illeszkedő számvektorok merőlegesek minden másik számvektorra. A merőlegességnek ezek a *geometriai* jellemzései nemcsak kontraintuitívek, de bonyolultak is, pedig *algebrailag* igen egyszerűen, ráadásul mindhárom számsíkra egységesen szemléltethető a merőlegesség fogalma: merőleges két számvektor, ha az egyik egyenlő a másik képzetes számszorosával:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0 \iff z_1 = b\boldsymbol{\delta} z_2 \quad (43)$$

Ahol b valós szám, és $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$, $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. Ez egyedül a komplex számoknál jelenti a klasszikus meredekséget, hiszen ott, ha a tiszta képzetes számmal, azaz **i**-vel szorzunk egy komplex számot, a szorzatvektor az eredeti vektor elforgatását jelenti π/2-vel, azaz az eredeti számvektorra merőleges a szorzatvektor. Általánosan is egyszerű belátni, hogy **bármely kételemű számsíkon két számvektor skalárszorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha az egyik egyenlő a másik képzetes számszorosával**. A bizonyítástól most eltekintek, egy korábbi cikkemben erre kitértem.[15]

A fentiek ismeretében már könnyű belátni, hogy a (42)-es összefüggés a kételeműek számsíkjain is igaz. Ennek bizonyítását az olvasóra bízom, ha van kedve játszani a számokkal. Csak azt a jó tanácsot kell megfogadni, hogy ne geometriai, hanem algebrai eszközöket használjunk: a kételemű számok tulajdonságait és a (43)-as bizonyítható állítást.

Két összefüggést fontos hangsúlyozni. Ha az egyik definíció közülük, akkor a másik bizonyítható tétel:

- **A kételeműek számsíkjain két számvektort akkor nevezek merőlegesnek, ha a skalárszorzatuk nullával egyenlő.**
- **Bármely kételemű számsíkon két számvektor skalárszorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha az egyik egyenlő a másik képzetes számszorosával**

3.3. A ferde-skaláris szorzat algebrája és geometriája

Az euklideszi síkon egy paralelogramma területe egyenlő két szomszédos oldalának hossza, valamint az oldalak által közbezárt szög szinuszának szorzatával:

$$T = |a||b|\sin\varphi \quad (44)$$

A *komplex* számsíkon definiált ferde-skaláris szorzat is két számvektor által kifeszített paralelogramma előjeles területének nagysága, lásd a (34)-es egyenletet, figyelembe véve, hogy egy komplex szám konjugáltjának abszolútértéke egyenlő az adott szám abszolútértékével. A ferde skaláris szorzatok azonos módon definiáltak a parabolikus és a hiperbolikus számsíkokon is – lásd a (32)-, és (33)-as egyenleteket – de ezeken a számsíkokon a terület fogalma még nem

[15] Lásd „*A szimplektikus teve „természetes előfordulásai” II.*” című cikket, https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii

definiált. Egy korábbi cikkemben[16] számvektorpárok ekvivalenciájaként vezettem be a kételeműeken általánosan egy területfogalmat a ferde-skaláris szorzat segítségével, majd beláttam, hogy ez a területfogalom ekvivalens a komplex számsík – és az euklideszi sík – paralelogrammáinak területével. Így kezdetben a ferde-skaláris szorzatokat akartam területként bevezetni, de később meg fogom indokolni, hogy miért választom inkább a külső szorzatot – tehát a ferde-skaláris szorzat képzetes számszorosát – a terület definíciójaként.

4. Megjegyzés

Aki hasonlóságot vél felfedezni a vektoralgebra vektoriális szorzata és a fent definiált „vektoriális terület" fogalma, mint külső szorzat között, az nem téved. Épp ez az egyik ok, amiért a külső szorzatot választottam a terület definíciójaként. Hasznos lesz a matematikai fizikában.

Tehát két vektor – legyenek ezek **z** és **w** számvektorok – által kifeszített paralelogramma területének nevezem a következőt:

$$T = z \wedge w = \boldsymbol{\delta}\,\omega(z, w) = \boldsymbol{\delta}\mathrm{Im}(\bar{z}w) = \boldsymbol{\delta}|\bar{z}||w|\sinh(\Theta_z - \theta_w) = \boldsymbol{\delta}(z_1 w_2 - z_2 w_1) \qquad (45)$$

Ahol szokás szerint $\boldsymbol{\delta}$ = **i, j, k** ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$, $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, Θ_z a z vektor, θ_w pedig a w vektor argumentuma, z_1, z_2, w_1, w_2 pedig a vektorok **Descartes**-koordinátái, azaz $z=z_1+\boldsymbol{\delta}z_2$ és $w=w_1+\boldsymbol{\delta}w_2$.

Könnyen igazolható, hogy a ferde-skaláris szorzat – és így két vektor által kifeszített paralelogramma területe – akkor 0, ha a két vektor párhuzamos, másképp az egyik vektor a másik valós számszorosa.[17]

Két fontos összefüggés közül, ha az egyik definíció, akkor a másik bizonyítható tétel:

- **A kételeműek számsíkjain két számvektort akkor nevezek párhuzamosnak, ha a ferde-skaláris szorzatuk nullával egyenlő.**
- **Bármely kételemű számsíkon két számvektor ferde-skaláris szorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha az egyik egyenlő a másik valós számszorosával**:

3.4. A sebességmodellek speciális szorzatokkal kifejezve

A geometriai szorzat (36)-os alakja egyrészt egy kételemű számot határoz meg, másrészt definíció szerint két kételemű szám szorzata. Ez eszembe juttatja a **Lorentz**-, a **Galilei**- és a

[16] Lásd „A geometriai algebra alapelemei és a számok II. – A bivektor és a paralelogrammák ekvivalenciája a három számsíkon" című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/185-a-geometriai-algebra-alapelemei-%C3%A9s-a-sz%C3%A1mok-ii

[17] Lásd Lásd „*A szimplektikus teve „természetes előfordulásai" II.*" című cikket, https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii

komplex téridőbeli inerciarendszerek közötti transzformációk exponenciális alakját a (8), (18) és (22) egyenletekben. Általánosan igaz az inerciarendszerek közötti téridőkben, hogy

$$z' = ze^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}} \tag{46}$$

Ahol, mint mindig **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A (46)-os egyenletben a jobboldali szorzatot geometriai szorzatnak tekintve a következőt kapjuk:

$$z' = ze^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}} = \Pi\left(\bar{z}, e^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}}\right) = Re\left(ze^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}}\right) + \boldsymbol{\delta} Im\left(ze^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}}\right) \tag{47}$$

Így a szorzatok definícióit felhasználva:

$$z' = \langle \bar{z}, e^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}} \rangle + \boldsymbol{\delta}\, \omega\left(\bar{z}, e^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}}\right) \tag{48}$$

Inerciarendszerek modellezéséről van szó, így lényeges a sebesség transzformáltja, ami a (48) szerint:

$$v' = \frac{\omega\left(\bar{z}, e^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}}\right)}{\langle \bar{z}, e^{-\tau_0 \boldsymbol{\delta}} \rangle} \tag{49}$$

Így a sebesség transzformáltját felírtuk egy ferde-skaláris és egy skaláris szorzat hányadosaként.

4. Összegzés

Az egész cikk a kételemű számok legfontosabb összefüggéseit tartalmazza a differenciál- és integrálszámításra tekintettel, ezért nehéz ezek közül is a legjelentősebbeket kiemelni. Mindenesetre a bekeretezett szövegek különös figyelmet érdemelnek a mozgások tér- és téridőre vonatkozó jellemzését illetően, illetve a skaláris és ferde-skaláris szorzatok kétféle, egymással ekvivalens definícióira vonatkozóan. Sejthető, bár a cikkben direktben nem utaltam rá, hogy miért készítik elő a felsorolt összefüggések a differenciál- és integrálszámítást, hiszen egyrészt a sebességek a differenciálszámítás speciális elemei, mivel a sebesség az út idő szerinti deriváltja, másrészt az integrálszámítás eredetileg nem más, mint területszámítás és e cikk bevezetett egy területfogalmat a kételeműeken.

Melléklet – A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{M1}$$

ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus**, vagy **hiperbolikus** számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \tag{M2}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho\left(cp\frac{y}{x} + \boldsymbol{j}sp\frac{y}{x}\right) \quad \text{a parabolikus számoknál} \tag{M3}$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\varphi) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{M4}$$

ahol ϱ-t a számok **normájának**, vagy – a komplexek nyomán – **abszolútértékének** a φ-t a számok **argumentumának** nevezem, mindkettőt pedig a számok *polárkoordinátáinak* hívom, szemben az kételeműek (M1)-beli *algebrai* alakjával, amelyben x és y a számok **Descartes**-koordinátái a kételeműek számsíkjain.

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám normája (abszolútértéke) $|z| = x$, argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \tag{M5}$$

ahol φ az argumentum és ϱ a norma az adott számsíkon, és mint fent **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus** vagy **hiperbolikus** számsíkról van szó.

A $|\;|$ **abszolútérték-jelölést** jelölést is használva, mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$|z| = \varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \tag{M6}$$

ahol **δ,** mint mindig, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

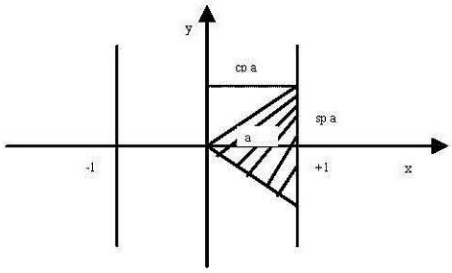
$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta}y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta}y \tag{M7}$$

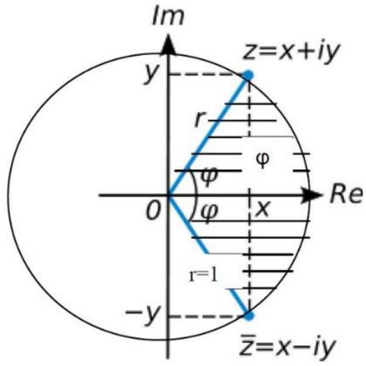
Mindhárom számsíkon fontos szerepe van a fizikából jól ismert **skalárszorzatnak**, amely a három számsíkon általánosan a következő:

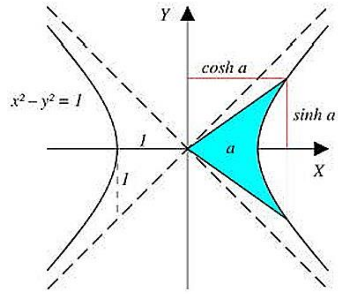
$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\bar{z_1}z_2) = |\bar{z_1}||z_2|\,\mathrm{COS}(\tau_2 - \tau_1) = x_1x_2 - \boldsymbol{\delta}^2 y_1y_2 \tag{M8}$$

Ahol Re a kételemű számok **valós részét** jelöli, $|\;|$ a z abszolútértéket, vagy normát jelöli, COS pedig az adott számsíkon definiált koszinusz függvényt jelenti, azaz koszinuszt (cos) a komplex számsíkon, cp [arg(z)] ≡ 1 függvényt a parabolikus számsíkon és hiperbolikus koszinuszt (cosh) a hiperbolikus számsíkon, **δ,** pedig, mint mindig, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli.

A számsíkok szemléltetése:







Parabolikus számsík

Komplex számsík

Hiperbolikus számsík