A többelemű számok

Matematikai varázslat, varázslatos matematika

„A matematika olyan, mint egy csodálatos kert. Tele szebbnél szebb virágokkal, amelyeket, ha gondozunk, csodálatos varázslatok tanúi lehetünk.”
(Péter Rózsa)

Euler óta csodáljuk a róla elnevezett összefüggést:

$$e^{i\pi} = -1 \qquad (1)$$

Szinte misztikusnak tűnik, miképp kapunk két transzcendens szám: **e** és **π**, valamint az **i** képzetes szám közötti műveletből egész számot. Régóta tudjuk – már akit elvarázsolt a matematika – hogy a fenti képlet a -1-nek az exponenciális alakja a **komplex számok** körében. **Paul J. Nahin** egy egész könyvet[1] szentelt **Euler** e mesés formulájának, ebben a könyvben említi, hogy 1988-ban egy, a **Springer-Verlag** által szponzorált matematikai folyóiratban[2] „szépségversenyt” hirdettek 24 matematikai összefüggéssel kapcsolatban, amelyet a fenti képlet nyert meg.

Már maga a képlet is lenyűgöző, de a szépségén túl csodás tartalmak bonthatók ki belőle, ezek közül néhány mostanában sejlett fel előttem. Nézzük előbb sorjában mit is tudunk róla, majd következzenek a sejtések.

1. Amit régóta tudunk a kételemű számok egyikéről, a komplex számsíkról

A komplex számok régóta ismertek, elsőként a komplex képzetes számot vezették be a matematikában, azaz azt a számot, amelynek négyzete mínusz eggyel egyenlő. Ezt a számot **i**-vel jelölték az imaginárius – képzeletbeli – szó jelentésére utalva: $\mathbf{i}^2=-1$. A matematikai fizikában betöltött szerepe alapján ma már tudjuk, hogy ezt a kezdetben „képzetesnek” mondott számot egyáltalán nemcsak a képzelet szülte, hanem a fizikai valóság egyes elemei írhatók le vele.

Matematikatörténeti érdekesség, hogy a komplex képzetes felismerése a XVI. századra datálódik, a harmadfokú egyenletek megoldásához kapcsolódóan, ehhez képest, a XVIII-XIX. század fordulóján ismerték csak fel a komplex számok alapvető tulajdonságait, kapcsolatát a geometriával. A komplex számsík használata **Wessel**, **Argand** és **Gauss** munkáiban jelent meg először. A sors iróniája, hogy a komplex számsíkot a mai napig **Argand**-síknak vagy **Gauss**-

[1] *Dr. Euler's Fabulous Formula – Cures Mathematical Ills*, **Paul J. Nahin**, Princeton University Press, 2006.
[2] *Mathematical Intelligencer*, https://www.springer.com/journal/283

síknak nevezik, holott **Caspar Wessel** norvég-dán matematikus évekkel megelőzte a komplex számsíkot leíró publikációjával a „nagy neveket”.

A komplex számsíkot azok a számok alkotják, amelyekre a következő igaz: $z = x + \boldsymbol{i}y$, ahol x és y valós számok, és $\mathbf{i}^2$=-1. A komplex szám egy számvektornak felel meg a komplex számsíkon, ahol a vízszintes koordinátatengely a valós összetevőket, a függőleges koordinátatengely a komplex összetevőket tartalmazza.

Egy komplex számnak van *hossza* – erre a *norma* és az *abszolútérték* kifejezést is használom – és van *irányszöge*, vagy *argumentuma*, amely a számvektornak a valós tengellyel bezárt irányított szöge. A hossz és az irányszög a számvektor *polárkoordinátái*, és velük a szám trigonometrikus alakra hozható:

$$z = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$$

Ahol ϱ a komplex szám hossza, φ az irányszöge, a számvektor derékszögű koordinátáival kifejezve ezek a következők:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \boldsymbol{i}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{x+\boldsymbol{i}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x+\boldsymbol{i}y}{x-\boldsymbol{i}y}}$$

A polárkoordinátákkal lehet a számot exponenciális alakra hozni:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{i}\varphi}$$

Ennek az exponenciális alaknak a segítségével kaphatjuk eredményül a „meseszép” (1)-es egyenletet, azaz z=-1 esetén a szám hossza 1, irányszöge pedig π, így

$$-1 = e^{i\pi}$$

2. Ami mostanában körvonalazódik a kételemű számokról

Nemcsak a komplex számoknak, de minden kételemű számnak is van exponenciális függvénnyel kifejezhető alakja.

Kételemű számoknak[3] nevezem azokat a z számokat, amelyek

$$z = x + \boldsymbol{\delta}y \tag{2}$$

alakban írhatók fel, ahol x és y valós számok, valamint

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{i}^2 = -1, \qquad \boldsymbol{j}^2 = 0, (\boldsymbol{j} \neq 0), \qquad \boldsymbol{k}^2 = 1\ (\boldsymbol{k} \neq \pm 1) \tag{3}$$

aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, azaz **i** az (1) egyenletben is szereplő, jól ismert komplex képzetes, **j** pedig a több néven említett *parabolikus* szám képzetese, és **k** a szintén sok néven emlegetett *hiperbolikus* számok imagináriusa.

A hiperbolikus számok nagyon sok néven szerepelnek az irodalomban – például *perplex* számok, split-*complex* számok néven – a **Wikipedia**ban[4] 19 szinonimájukat sorolják fel. Ez is alátámasztja, hogy mennyire nem egységes, kidolgozatlan a hiperbolikus számok matematikája. Ma már valamennyivel elterjedtebb a *hiperbolikus* szám elnevezés – én is ezt használom – hiszen e számok síkján az egységvektorok derékszögű hiperbolán helyezkednek el. A *parabolikus* számok *Study-féle* vagy *duális* számok (dual number) néven találhatók meg – ez utóbbi néven szerepel a **Wikipédiá**ban is –, de sokkal logikusabb a *parabolikus* szám elnevezés

[3] Szakirodalomban találkoztam e számok „bináris számok” (binary number) elnevezésével, de ezt nem tartom ügyesnek, mert a bináris szám már elterjedt elnevezése a kettes alapú számrendszer számainak.
[4] Lásd: Split-complex number - Wikipedia

– én ezt használom –, mert e számok síkján az egységvektorok egy párhuzamos egyenespáron helyezkednek el, ami egy elfajult parabola. A *komplex* számokat elterjedtségük és nagy ismertségük miatt nem kereszteltem át elliptikus számokra, pedig ez lenne a logikus, hiszen egységvektoraik egy egységkörön helyezkednek el. Tehát **e kételemű számok egységvektorainak mindegyike egy szimmetrikus másodfokú függvény valamelyikén – speciális ellipszisen (körön), speciális parabolán (párhuzamos egyenespáron) vagy speciális hiperbolán (derékszögű hiperbolán) – helyezkednek el, ezért logikus lenne elnevezésükre az elliptikus, parabolikus és hiperbolikus szám elnevezést használni**.

A parabolikus és a hiperbolikus számok ismerete jóval későbbre datálódik, mint a komplexeké, A XIX. század végére és a XX. század elejére. E két számkör képzetese **W. K. Clifford** és **E. Study** munkáiban jelenik meg először, és történetük abban hasonlít a komplex képzetes történetéhez, hogy sokáig csak matematikai konstrukciókban tűnnek fel. A parabolikus szám képzetese a **Pauli** féle kizárási elv matematizálásában válik először hasznossá a fizikában, a hiperbolikus számok jóval később, a XX. század második felének is inkább a vége felé jelennek meg szórványosan egy-egy munkában, elsősorban mint a **Lorentz**-transzformációt, s így a speciális relativitáselméletet modellező eszköz.

A kételemű számok ma már áthatják az egész matematikai fizikát, mondhatjuk, hogy a legfontosabb elemi matematikai komponensek a fizika modellezésében.
Korábbi cikkeimben[5] sokat írtam arról, hogy **egy-egy kételemű számmal modellezhetőek az alábbiak valamennyien:**

- **A kontinuumhipotézis[6] (CH) alternatíváinak és ezzel a végteleneknek nem mennyiségként, hanem *új minőségként* való megragadása** egy olyan modell, amelyhez hasonlót sem találtam a szakirodalomban. Ugyanakkor szerintem igen meggyőző érvek szólnak mellette, egyrészt a matematika oldaláról, ahol a helyiértékes számrendszer eddig ki nem használt lehetőségét ragadjuk meg vele, másrészt tapasztalati oldalról, hiszen aktuális végtelen *mennyiséget* nem tapasztalunk, de különböző *minőségű* dolgok miriádjai vesznek körül bennünket.
  Maguk ezek a kételemű számok nagyon elvarázsolt matematikai kitalációnak tűnnek, a CH pedig még idegenebb lehet egy, az axiomatizált halmazelméletben járatlan embernek. Az a felismerés azonban, amely segített a képzetes elemeket a CH-alternatívákhoz kötni, az a számítástechnikában *fizikailag* megvalósított számábrázolásból fakad.[7] Így mind a kételemű számok képzetes eleme, mind a CH-alternatívák mélyen a fizikai világban gyökereznek, és ha különösnek tűnnek is ezek a számok, de éppoly tapasztalatiak, mint a természetes számok, csak a tapasztalatnak egy sokkal mélyebb szintjéről származnak, ahová csak mostanában jutottunk el a számítógépek fizikai valóságában.
- **A valószínűségszámítás 3 lényegesen eltérő fajtája abban különbözik, hogy mely kételemű számot alkalmazza.**[8] A kvantummechanika (QM) valószínűségszámítása a

[5] Lásd erről például a témát összefoglaló „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa , vagy „*A végtelen kicsiben és nagyban I.*” című cikket: A végtelen kicsiben és nagyban I. (infinitemath.hu)
[6] Nagyon egyszerű megfogalmazásban a kontinuumhipotézis azt állítja, hogy a valós számok számossága – azaz a kontinuum számosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. A CH tagadása, pontosabban két alternatívája a következő: a megszámlálhatóan sok és a kontinuum sok között létezik más végtelen számosság, és belőle vagy egyetlen egy van, vagy végtelen sok létezik.
[7] Lásd erről például a témát összefoglaló „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa , vagy „*A végtelen kicsiben és nagyban I.*” című cikket: A végtelen kicsiben és nagyban I. (infinitemath.hu)
[8] Lásd például a „*Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-

komplex számokat használja, **Andrei Khrennikov** hiperbolikus kvantummechanikája a hiperbolikus képzeteseken alapszik. Ennek gyakorlati alkalmazása még várat magára, de jó esély van arra, hogy egy fizikai információelmélet eszköze lehet. Végül a parabolikus képzetesről csak most derült ki[9] – ehhez sem találtam szakirodalmat –, hogy a klasszikus valószínűségszámítás modellezhető vele. Ez az új megközelítés azt a reményt kelti, hogy a jelenlegi, csak a valós számokat használó klasszikus valószínűségszámítás alkalmazásában megjelenő paradoxonok eltűnhetnek az új modell használatakor.

- **A háromféle téridő-modell** is a bennük alkalmazott kételemű számban különbözik. A szakirodalmi példák egyike **I. J. Jaglom** „*Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria*” című, 1985-ben magyarul is megjelent könyve – igaz, csak a Függelékében – tartalmazza a három kételemű szám leírását és a **Galilei**-transzformáció modellezését a parabolikus számokkal, valamint a hiperbolikus számsíkon modellezhető **Lorentz**-transzformációt.[10] A komplex számban rejlő téridő-viszonyhoz nem találtam szakirodalmat, bár értelemszerűen kínálkozik a feltételezés, hogy a harmadik kételemű számhalmaz, a komplex számsík is modellezhet egyfajta téridő-összefüggést. A parabolikus és a hiperbolikus esetben maguk a tapasztalatok – a „működő” **Galilei**-transzformáció a parabolikus számokkal és a szintén „működő” **Lorentz**-transzformáció a hiperbolikus számokkal – szentesítik a számsíkok téridő-modell szerepét, de a komplex esetben úgy tűnhet, hogy „csak” az analógia erősíti feltételezésünket a komplex számsík téridőt modellező funkciójáról. **Feynman** pályaintegrál módszere a kvantumelektrodinamikában (QED-ben) nemcsak jól használható számítási módszer, de feltárja a komplex számok polárkoordinátáinak teret és időt modellező szerepét is.[11] **Feynman** nem nevezi néven a komplex téridőt, de épp azt írja körül a QED-et leíró – azaz a pályaintegrál – módszerét magyarázó kis könyvében[12]

Ezek a számok mindhárom számsíkon felírhatók a következő exponenciális alakban:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \tag{4}$$

Ahol **δ** a (3) szerint értendő, ϱ a z számvektor hossza vagy normája, φ pedig a z számvektornak a valós tengellyel bezárt irányított szöge az adott számsíkon értelmezett normának és irányszögnek megfelelően. **Figyelem! Ezek a normák és irányszögek mind mást és mást jelentenek az egyes számsíkokon.** A kételemű számok elemi tulajdonságait az **A. Melléklet** tartalmazza.

Az (1) és a (4) egyenlet alapján felmerül a kérdés, hogy vajon a parabolikus és a hiperbolikus számok síkján – amelyek szintén tartalmazzák a valós számegyenest – milyen exponenciális alakot kapunk a -1 számra.

---

kvantummechanikajahoz

[9] Lásd például a „*Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

[10] Lásd ehhez „*A Galilei transzformáció és a parabolikus számok*” című cikket: A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok (infinitemath.hu)

[11] Lásd ehhez „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikk. 4. pontját: Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása (infinitemath.hu)

[12] Lásd **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

2.1. A -1 a parabolikus számsíkon

A parabolikus számok körében is definiálható exponenciális függvény a következő:

$$z = x + y\boldsymbol{j} = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = x\, e^{\frac{y}{x}\boldsymbol{j}} \tag{5}$$

Az (5) os egyenletből $z = -1$ esetben $z = x\, e^{\frac{y}{x}\boldsymbol{j}} = -1e^0 = -1$. Ez minden valós számra igaz, azaz **a parabolikus számsíkon a negatív valós számok exponenciális alakja is azonos magával a valós számmal, nemcsak a pozitív valós számok.** A parabolikus számok szoros rokonságát mutatja mindez nemcsak a kételeműekkel, de a valós számokkal is.

2.2. A -1 a hiperbolikus számsíkon

A hiperbolikus számok körében is definiálható exponenciális függvény a következő:

$$z = \varrho\, e^{\varphi \boldsymbol{k}} \tag{6}$$

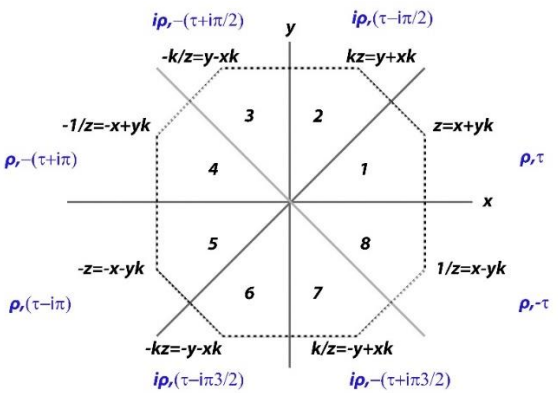
ahol

$$\tanh\varphi = \frac{y}{x}$$

és

$$\varrho = \sqrt[2]{x^2 - y^2}$$

A hiperbolikus számsíkon kissé nehezebb felírni a -1 exponenciális alakját az argumentuma miatt. A hiperbolikus számok argumentuma sík-nyolcadonként változó alakban írható fel.



Részletes levezetés helyett a fenti ábrán mutatom be, hogy a polárkoordináták miképp változnak az 1. síknyolcad polárkoordinátáival kifejezve. Ezek alapján a -1 hiperbolikus számvektor argumentuma **-i**π, hossza természetesen 1, így a (6) alapján az exponenciális alakja a következő:

$$-1 = e^{-\boldsymbol{i}\pi k} = e^{-\pi(\boldsymbol{ik})} \tag{7}$$

Itt a kitevőben két képzetes; a komplex **i** és a hiperbolikus **k** szorzata szerepel, így ennek értelmezéséhez szükséges a kételeműek kiterjesztése egy bővebb számkörre, egy olyan számkörre, amelyben értelmezve van a különböző képzetesek szorzata.

3. A kételemű számok bővítése többelemű számkörre

A fizika matematikai modelljeiben tehát a kételemű számok mindhárom képzetese alapvetően fontos szerepet tölt be, és több próbálkozás volt arra, hogy az egyiket a másikból származtassák.

Sokan valamiféle határátmenetet feltételeztek, illetve ma is gondolnak a kvantumos és a klasszikus világunk között, és ezzel az **i** és a **j** képzetesek között is, hiszen a QM standard reprezentációjában, ha az egyenletekben az **i** helyére **j**-t írunk, akkor a klasszikus mechanika leírásához jutunk. A két mechanika valószínűségekkel ábrázolt leírásában is hasonló a helyzet. Természetesen egyik képzetes sem származik a másikból, de sejthetően „azonos származásúak", ahogy a valós +1, −1 és 0 is egy közös egyenesen, a valós számegyenesen helyezkednek el. Az utóbbi valós számok mindhárman mennyiséget jelölő számok, de emellett a legelemibb *műveletet* is reprezentálják: a valamihez „*hozzáadunk*" vagy „*elveszünk*" műveletet, vagy a számosságában „*változatlanul hagyunk*" lépést. Ennek megfelelően a **relatív** *többlet*et vagy *hiány*t, illetve a *semmi*t is jelölik. Képzeteseik négyzetei is *hasonlót* jelentenek, amit jól mutat az, amint a kontinuumhipotézis változatait modellezik: a modellben használt **i**-, **j**-, **k**-tól függően a kontinuum sok, azaz a valós számok számossága és a természetes számok számossága között vagy nincsen, vagy létezik végtelen számosság[13]. (Megjegyzem, hogy az utóbbi esetben lényeges módon különbözik az *egyetlen* létező a *sok*tól.) Tehát a kontinuum sok és a megszámlálhatóan sok között vagy hiány, vagy többlet mutatkozik a végtelent, mint új minőséget tekintve.

A különböző kételemű számok közös számrendszerét olyan rendszerben kell tehát keresni, amelyben a különböző képzetesek egymás közti transzformációja nem egyfajta határátmenet, hanem a pozitív és negatív valós számok, valamint a nulla közötti alapműveletek egyfajta általánosítása, pontosabban megtartása, figyelembe véve az **i**, **j**, **k** képzetesek négyzeteit. Így a többelemű számok kialakításánál *három* szempontot vettem figyelembe, *egyrészt* az új számrendszernek alapelemei kell, hogy legyenek a kételemű számok, *másrészt* a képzetes számok szorzatának kommutatívnak és asszociatívnak kell lennie a valós számokon értelmezett szorzáshoz hasonlóan, *harmadrészt* pedig a kételeműek már ismert 3 képzetesének szorzatából definiált új képzetesek négyzete feleljen meg annak a szabálynak, hogy egy szorzat négyzete egyenlő a tényezői négyzetének szorzatával.

Egy korábbi cikkemben[14], ahol összefoglaltam azt a követelményrendszert, amit az új számkörtől elvárok, megfogalmaztam a fentiek mellett egy – a matematikai fizikában való felhasználhatóság miatt – fontos matematikai követelményt, miszerint a bővített számkörben definiálhatónak kell lennie egy *szimmetrikus* és egy *nem elfajuló antiszimmetrikus bilineáris forma*nak. E követelmények azonban bizonyíthatóan teljesíthetők a fenti három előírásnak megfelelő számrendszerben, tehát előírásuk szükségtelen. A kételemű számoknál már bemutattam az ilyen függvények előállítását – lásd a **B. Melléklet**et –, a következő pontban pedig be fogom mutatni, hogy miképp állíthatók elő ilyen függvények a bővített számkörben egy olyan eljárással, amelyet mind a geometriai algebrában mind a matematika egyéb területén alkalmaznak.

Így olyan, a kételeműek képzeteseinek szorzatát tartalmazó legszűkebb többelemű számkörhöz jutottam, amelynek szorzótáblája a következő:

---

[13] Lásd erről például a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*" című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa , vagy „*A végtelen kicsiben és nagyban I.*" című cikket: A végtelen kicsiben és nagyban I. (infinitemath.hu)

[14] Lásd a „*Hogyan tovább egy új számrendszerhez?*" című cikket; Hogyan tovább egy új számrendszerhez? (infinitemath.hu)

	1	**i**	**j**	**k**	**ij**	**ik**	**jk**	**ijk**
1	1	i	j	k	ij	ik	jk	ijk
i	i	−1	ij	ik	−j	−k	ijk	−jk
j	j	ij	0	jk	0	ijk	0	0
k	k	ik	jk	1	ijk	i	j	ij
ij	ij	−j	0	ijk	0	−jk	0	0
ik	ik	−k	ijk	i	−jk	-1	ij	−j
jk	jk	ijk	0	j	0	ij	0	0
ijk	ijk	−jk	0	ij	0	−j	0	0

1. táblázat

A továbbiakban báziselemeknek nevezem a valós +1-et és valamennyi képzetest.

Megjegyzés

Az **i**-t, **j**-t, **k**-t a valós számokból generáltaknak nevezem, mert a valósok kétfajta – extenzív és intenzív – végtelenjének modelljei, tehát mintegy bővítései a valós számoknak.[15]

Egyszeres képzetesnek nevezem az **i**-t, **j**-t, **k**-t, **kétszeres képzetes**nek fogom nevezni a kettő egyszeres képzetes szorzatából álló képzeteseket, – tehát **ij**-t, **ik**-t, **jk**-t –, és **háromszoros képzetes**nek a három egyszeres képzetes szorzatából állót, tehát **ijk**-t.

A fenti szorzótábla csak első pillantásra tűnik bonyolultnak, második pillantásra már látszik, hogy a kételeműek már ismert képzeteseinek – **i**, **j**, **k** – szorzatai az új számelemek és ezeknek az előző képzetesekkel, illetve az újakkal való szorzata a szorzatra vonatkozó szabályokat – kommutativitás, asszociativitás, a szorzat négyzete a tényezői négyzetének szorzata – figyelembe véve logikusan adódik. Két példával szemléltetve:

1. (ij)(ik)=(ii)(jk)=-jk,
2. j(ijk)=jijk=jjik=0

Látható, hogy a zárójelek tulajdonképpen feleslegesek, hiszen a kommutatív és az asszociatív szabály miatt a tényezők tetszőleges sorrendbe írhatók és csoportosíthatók. A képzetesek szorzatára vonatkozó szabályok alapján következik, hogy azoknak a többszörös képzeteseknek a négyzete 0-val egyenlő, amelyeknek legalább egy eleme a **j** képzetes, továbbá azoknak a többszörös képzeteseknek a négyzete -1, amelyek egyik tényezője sem **j**, de tényezői között az **i** páratlan sokszor szerepel.

Zavarhatja valakit, hogy az új képzeteseket szorzatként jelöltem, mintegy a „régi képzeteseket”, azaz az egyszeres képzeteseket egymás mellé írva, de ez igen praktikus a műveletek elvégzésénél. Ha újabb betűvel jelöltem volna őket, amint alább a **2. táblázat** mutatja, akkor a műveletvégzésnél mindig a táblázathoz kellene fordulnom, mert a képzetesek ez a fajta jelölése elrejti a szorzásaik egyszerű szabályait, amelyek az **1. táblázat**ból nyilvánvalóak.

[15] Lásd „A végtelen kicsiben és nagyban I.” című cikket; A végtelen kicsiben és nagyban I. (infinitemath.hu)

	1	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**p**
1	1	i	j	k	l	m	n	p
i	i	−1	l	m	−j	−k	p	−n
j	j	l	0	n	0	p	0	0
k	k	m	n	1	p	i	j	l
l	l	−j	0	p	0	−n	0	0
m	m	−k	p	i	−n	-1	l	−j
n	n	p	0	j	0	l	0	0
p	p	−n	0	l	0	−j	0	0

2. táblázat

Érdekes és hasznos tulajdonsága az **1. ábrá**val definiált számoknak, hogy báziselemeit „megfelezhetjük”, ha nem a valós számokat, hanem a kételemű számok egyikét tekintjük „skalár elemnek”, azaz

$a_0+a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}+a_4\mathbf{ij}+a_5\mathbf{ik}+a_6\mathbf{jk}+a_7\mathbf{ijk}=$

$$(a_0 + a_1\mathbf{i}) + \mathbf{j}(a_2 + a_4\mathbf{i}) + \mathbf{k}(a_3 + a_5\mathbf{i}) + \mathbf{jk}(a_6 + a_7\mathbf{i})$$

$a_0+a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}+a_4\mathbf{ij}+a_5\mathbf{ik}+a_6\mathbf{jk}+a_7\mathbf{ijk}=$

$$(a_0 + a_2\mathbf{j}) + \mathbf{i}(a_1 + a_4\mathbf{j}) + \mathbf{k}(a_3 + a_6\mathbf{j}) + \mathbf{ik}(a_5 + a_7\mathbf{j})$$

$a_0+a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}+a_4\mathbf{ij}+a_5\mathbf{ik}+a_6\mathbf{jk}+a_7\mathbf{ijk}=$

$$(a_0 + a_3\mathbf{k}) + \mathbf{i}(a_1 + a_5\mathbf{k}) + \mathbf{j}(a_2 + a_6\mathbf{k}) + \mathbf{ij}(a_4 + a_7\mathbf{k})$$

3.1. A teljes számkör

A fenti bővítésben csak az volt a cél, hogy definiáljuk a kételeműek képzeteseinek szorzatát, és az ezeket tartalmazó legszűkebb számkört tekintsük. Ennél azonban sokkal gazdagabb számkörré bővíthetők a kételemű számok algebrái, hiszen egy-egy algebrában több egyszeres képzetes szerepelhet, lásd példaként a következő oldalon a **6. táblázat**ot.

Egyéb példák a következő algebrák, amelyeket szintén elemeinek szorzótáblájával definiálok. A 2 különböző képzetest tartalmazó 4 elemű számalgebrának 3 fajtája van:

	1	**i**	**j**	**ij**
1	1	i	j	ij
i	i	−1	ij	−j
j	j	ij	0	0
ij	ij	−j	0	0

3. táblázat

	1	**i**	**k**	**ik**
1	1	i	k	ik
i	i	−1	ik	−k
k	k	ik	1	i
ik	ik	−k	i	-1

4. táblázat

	1	**j**	**k**	**jk**
1	1	j	k	jk
j	j	0	jk	0
k	k	jk	1	j
jk	jk	0	j	0

5. táblázat

A kételemű számsíkokkal együtt a fenti három táblázatban definiált algebra is részalgebrája az **1. táblázat**tal definiált algebrának.

Vannak azonban olyan algebrák is, amelyek nem részalgebrái az **1. táblázat**tal definiált algebrának, de algebrák a kételemű számok képzeteseit és azok szorzatait tartalmazva, például az az algebra, amely kettő négyzetében 1-et adó képzetest és azok szorzatát tartalmazza:

	1	$\mathbf{k_1}$	$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_1k_2}$
1	1	$\mathbf{k_1}$	$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_1k_2}$
$\mathbf{k_1}$	$\mathbf{k_1}$	1	$\mathbf{k_1k_2}$	$\mathbf{k_2}$
$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_1k_2}$	1	$\mathbf{k_1}$
$\mathbf{k_1k_2}$	$\mathbf{k_1k_2}$	$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_1}$	1

6. táblázat

A bővített számkör alatt tehát olyan számrendszereket értek, amelyek kommutatív algebrák, azaz zártak az összeadás és a szorzás műveletére, mindkét műveletre kommutatívok, és az asszociativitás és a disztributivitás is tulajdonságuk, továbbá tetszőlegesen sok, de véges számú egyszeres képzetest tartalmaznak, és nyilvánvalóan azok szorzatait is. Általánosan, azaz e számrendszerek mindegyikére igaz az, hogy a báziselemeinek száma 2^n, ha az egyszeres képzetesek száma n.

3.2. Szimmetrikus bilineáris és antiszimmetrikus bilineáris (szimplektikus) formák a bővített számkör egyes rendszereiben

A kételemű számoknál konjugáltak[16] segítségével lehet előállítani a geometriai algebra geometriai szorzatához hasonlót, amely a kételemű számoknál egy tetszőleges konjugált szám szorzása egy tetszőleges számmal, ugyanakkor szimmetrikus és egy antiszimmetrikus bilineáris forma összegévé alakítható, részleteiben lásd a **B. Melléklet**et. A geometriai algebrához hasonlóan az új számrendszerekben is többféle konjugált definiálható.[17] **Függetlenül attól, hogy a többelemű számokon miképp definiáljuk a konjugáltat, egy konjugált szám[18] szorzása egy számmal szintén átalakítható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus bilineáris forma összegévé a következő jól ismert módszerrel.** A fentiekben definiált számrendszerek bármelyikében legyen A és B tetszőleges számok, és a konjugáltjaik $\bar{A}$ és $\bar{B}$. A korábban[19] a skaláris szorzás jelölésére használt $\langle A, B\rangle$ jelöli a belső szorzatukat, és a szimplektikus szorzatukat $\omega(A, B)$ jelöli. Mivel a többelemű számoknál ezek a szorzatok általában nem skalárok, ezért a skaláris szorzat helyett a *belső szorzat* kifejezést használom, a ferde skaláris szorzat helyett pedig a *külső szorzat*ot. $\Pi(A, B) = \bar{A}B$ a geometriai algebra geometriai szorzatának megfelelője.

Ekkor a *belső szorzat* a következőképpen állítható elő:

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}(\bar{A}B + \bar{B}A) \tag{8}$$

A *külső szorzat* pedig a következő:

$$\omega(A, B) = \frac{1}{2}(\bar{A}B - \bar{B}A) \tag{9}$$

A fentiekből pedig következik, hogy

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle \tag{10}$$

$$\omega(A, B) = -\omega(B, A) \tag{11}$$

$$\Pi(A, B) = \bar{A}B = \langle A, B\rangle + \omega(A, B) \tag{12}$$

Példaként egy, a **6. táblázat**tal definiált számrendszerben mutatom be a belső és külső szorzatot. Legyen

$A = a_0 + a_1\mathbf{k_1} + a_2\mathbf{k_2} + a_3\mathbf{k_{12}}$

$B = b_0 + b_1\mathbf{k_1} + b_2\mathbf{k_2} + b_3\mathbf{k_{12}}$

Konjugáltjaikat pedig a következőként definiálom:

$\bar{A} = a_0 - a_1\mathbf{k_1} - a_2\mathbf{k_2} - a_3\mathbf{k_{12}}$

$\bar{B} = b_0 - b_1\mathbf{k_1} - b_2\mathbf{k_2} - b_3\mathbf{k_{12}}$

Ekkor a belső és külső szorzat a következő:

---

[16] Lásd az **A. Melléklet** A.M7 egyenletét.

[17] A matematikai definícióján túl szeretném *értelmezni* is a konjugált fogalmát a későbbiek során. A fizika különböző területein más és más konjugált fogalom alkalmas a matematikai leírásra, és ennek okát érdemes megvizsgálni.

[18] A többelemű számok speciális konjugáltja alatt azt a többelemű számot értjük, amely legalább egy elemében előjelében különbözik az eredeti számtól.

[19] Lásd a *„A szimplektikus teve „természetes előfordulásai”* című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/169-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai

$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}(\bar{A}B + \bar{B}A)$= a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3 - $\mathbf{k_1}(a_2b_3+a_3b_2)$ - $\mathbf{k_2}(a_1b_3+a_3b_1)$ - $\mathbf{k_{12}}(a_1b_2+a_2b_1)$

$\omega(A, B) = \frac{1}{2}(\bar{A}B - \bar{B}A)$= $\mathbf{k_1}(a_0b_1$-$a_1b_0)$ + $\mathbf{k_2}(a_0b_2$-$a_2b_0)$ + $\mathbf{k_{12}}(a_0b_3$-$a_3b_0)$

A számítás részleteit a **C. Melléklet** tartalmazza.

Az így definiált, és eredményül kapott belső és külső szorzat, mint *bilineáris és antiszimmetrikus bilineáris (szimplektikus) formák* tulajdonságai – szimmetriái és antiszimmetriái – könnyen igazolhatók. E tulajdonságokon kívül egyéb érdekes tulajdonságokkal is bírnak, de ez egy másik cikk témája lesz.

4. Összegzés

E cikkben szereplő számok története a természetes számokkal kezdődik, amelyek ismerete szinte egyidős az emberiséggel, nagy ugrást jelentett először a nulla, majd a negatív számok használatának bevezetése, és nem szabad megfeledkezni a tört számokról és azok helyiértékes ábrázolásának hasznosságáról sem. A képzetesnek nevezett számok felfedezése a középkorban kezdődött és bővítése a mai napig tart. Korábbi cikkeimben bemutattam, miként lehet az egyszeres képzeteseket – tehát a kételemű számok képzeteseit – a természetes számok bővítéseként, nem mennyiségi, hanem egyfajta *minőségi* végtelenként értelmezni, illetve hasonló utat bejárva az intenzív végtelen felé, és belátva, hogy a modell az infinitezimálisokra is vonatkozik. Ez a cikk ennek a felfedezőútnak a folytatása, azaz a kételemű számok bővítése tetszőlegesen nagy, de véges számú képzetest tartalmazó képzetes számok rendszereinek sokaságával. E cikk szövegében nem tértem ki arra, hogy ezek az új képzetesek is „elképzelhetőek” a helyiértékes számábrázolással, a kételeműek képzeteseinek minőségi végtelenként való értelmezéséhez hasonlóan itt is használhatnánk a helyiértékes számábrázolást, mint mankót az újabb és újabb minőségi végtelenek sorának értelmezésére. Nem tértem még ki az új többelemű számok fizikai alkalmazhatóságára sem, ez további írásaim témája lesz, hiszen a matematikai szépségük és izgalmasságuk mellett a legfontosabbnak a matematikai fizikában való felhasználhatóságukat tartom, amit megelőlegez a „származásuk”, a fizikai valóságban gyökerező létük. Egyelőre megelégedtem a kételeműek hasznosságának ismételt hangsúlyozásával, továbbá azzal, hogy bemutattam, miképp lehet könnyedén definiálni a többeleműekben is bilineáris szimmetrikus és antiszimmetrikus függvényeket, amelyek nélkülözhetetlenek – legalábbis az eddigi tapasztalatunk szerint – a matematikai fizikában.

Ugyan „teljes” számkörnek neveztem a fentiekben vázolt számbővítést, de ez a teljesség csak azokra a képzetes számot tartalmazó számrendszerekre igaz, amelyek képzeteseinek *négyzetei* valós számok, pontosabban -1, 0 vagy 1 a négyzetük. Létezik még ennél is bővebb számkör, amelynek képzetesei négyzetükben nem, de kettőnél nagyobb hatványukban valósak, azaz csak n-edik ($n \geq 3$) hatványuk -1, 0 vagy 1. Ezek feltérképezése még a fentieknél is izgalmasabb feladat. Keveset foglalkoztam velük, de így is találkoztam közöttük egy nagyon érdekes számkörrel. Remélem, lesz még alkalmam erről is írni.

A. Melléklet – A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (\mathrm{A.M1})$$

ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i^2=-1, j^2=0, j≠0, k^2=1, k≠1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus**, vagy **hiperbolikus** számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad (\mathrm{A.M2})$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho\left(cp\frac{y}{x} + \boldsymbol{j}sp\frac{y}{x}\right) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (\mathrm{A.M3})$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\varphi) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (\mathrm{A.M4})$$

ahol ϱ-t a számok **normájának**, vagy – a komplexek nyomán – **abszolútértékének** a φ-t a számok **argumentumának** nevezem, mindkettőt pedig a számok *polárkoordinátáinak* hívom, szemben az kételeműek (M1)-beli *algebrai* alakjával, amelyben x és y a számok **Descartes**-koordinátái a kételeműek számsíkjain.

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám normája (abszolútértéke) $|z| = x$, argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (A.\mathrm{M5})$$

ahol φ az argumentum és ϱ a norma az adott számsíkon, és mint fent **δ = i, j, k** (**i^2=-1, j^2=0, j≠0, k^2=1, k≠1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus** vagy **hiperbolikus** számsíkról van szó.

A **| | abszolútérték-jelölést** jelölést is használva, mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$|z| = \varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln\sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{z}}} \qquad (\mathrm{A.M6})$$

ahol **δ,** mint mindig, azaz **δ = i, j, k** (**i^2=-1, j^2=0, j≠0, k^2=1, k≠1**) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta} y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta} y \qquad (\mathrm{A.M7})$$

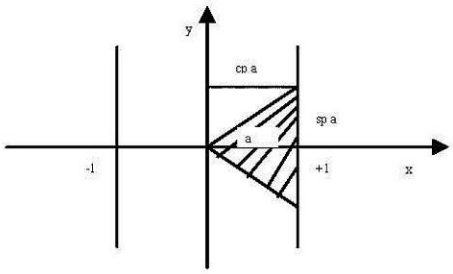
Mindhárom számsíkon fontos szerepe van a fizikából jól ismert **skalárszorzatnak**, amely a három számsíkon általánosan a következő:

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1||z_2|\,\mathrm{COS}(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 - \boldsymbol{\delta}^2 y_1 y_2 \qquad (\mathrm{A.M8})$$

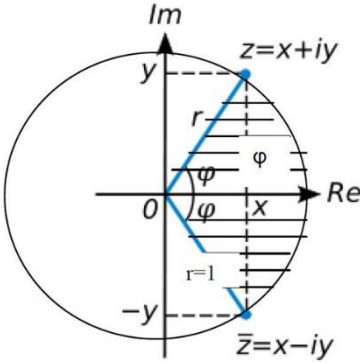
Ahol Re a kételemű számok **valós részét** jelöli, | | a z abszolútértéket, vagy normát jelöli, COS pedig az adott számsíkon definiált koszinusz függvényt jelenti, azaz koszinuszt (cos) a komplex számsíkon, cp [arg(z)] ≡ 1 függvényt a parabolikus számsíkon és hiperbolikus koszinuszt (cosh) a

hiperbolikus számsíkon, **δ,** pedig, mint mindig, azaz **δ = i, j, k** (**i^2**=-1**, j^2**=0**, j≠0, k^2**=1, **k≠1**) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli.

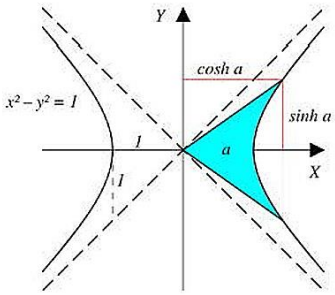
A számsíkok szemléltetése:



Parabolikus számsík



Komplex számsík



Hiperbolikus számsík

B. Melléklet – Skaláris és ferde-skaláris szorzat – azaz szimmetrikus és antiszimmetrikus bilineáris forma – a kételemű számokon

Az alábbiakat *A szimplektikus teve „természetes előfordulásai”* című cikkből emeltem ki.[20]

1.1 A skaláris szorzat

Tekintsük azt a szorzatot, melynek egyik tényezője egy szám konjugáltja:

A hiperbolikus számsíkon:

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - y_1\boldsymbol{k})(x_2 + y_2\boldsymbol{k}) = \boxed{x_1x_2 - y_1y_2} + \boxed{x_1y_2 - x_2y_1}\boldsymbol{k} \qquad \text{(B.M1)}$$

A parabolikus számsíkon:

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - y_1\boldsymbol{j})(x_2 + y_2\boldsymbol{j}) = \boxed{x_1x_2} + \boxed{x_1y_2 - x_2y_1}\boldsymbol{j} \qquad \text{(B.M2)}$$

A komplex számsíkon:

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - y_1\boldsymbol{i})(x_2 + y_2\boldsymbol{i}) = \boxed{x_1x_2 + y_1y_2} + \boxed{x_1y_2 - x_2y_1}\boldsymbol{i} \qquad \text{(B.M3)}$$

A három számsíkon az (B.M1), (B.M2), (B.M3) szorzat alapján definiált skaláris szorzatok ugyan eltérnek koordinátaszinten, de általánosan mindhárom számsíkon skalárszorzatnak nevezhetjük a

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\bar{z}_1 z_2) \qquad \text{(B.M4)}$$

leképezést, ahol Re jelöli a szorzat valós részét.

Polárkoordinátás felírással a következők adódnak:

Hiperbolikus esetben

$$Re(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1||z_2|\cosh(\tau_2 - \tau_1) = x_1x_2 - y_1y_2$$

Parabolikus esetben

$$Re(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1||z_2| = x_1x_2$$

Komplex számsíkon

$$Re(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1||z_2|\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = x_1x_2 + y_1y_2$$

A definícióból következik, hogy

$$\langle z_1, z_2\rangle = \langle z_2, z_1\rangle \qquad \text{(B.M5)}$$

Könnyen igazolható az is, hogy a fenti leképezések mindhárom számsíkon nem elfajuló szimmetrikus bilineáris formák, melyekből származtatott kvadratikus formák a számvektorok normájának (abszolutértékének) négyzetével egyeznek meg az adott számsíkon definiált módon, azaz $Re(\bar{z}_1 z_1) = \bar{z}_1 z_1$, mely koordinátákkal kifejezve:

Hiperbolikus esetben

$$Re(\bar{z}_1 z_1) = \bar{z}_1 z_1 = x_1^2 - y_1^2$$

Parabolikus esetben

$$Re(\bar{z}_1 z_1) = \bar{z}_1 z_1 = x_1^2$$

Komplex számsíkon

$$Re(\bar{z}_1 z_1) = \bar{z}_1 z_1 = x_1^2 + y_1^2$$

[20] Lásd http://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/169-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai

1.2 A ferde-skaláris szorzat

Mindhárom számsíkon az (B.M1), (B.M2), (B.M3) szorzat imaginárius része szimplektikus bilineáris forma, hiszen egyrészt:

$$Im(\overline{z_1}z_2) = -Im(\overline{z_2}z_1) \qquad (\mathrm{B.M6})$$

ahol Im-mel jelöltem a szorzat imaginárius részét.

Az aszimmetriából következően:

$$Im(\overline{z_1}z_1) = 0 \qquad \text{minden } \mathrm{z_1} - \mathrm{re} \qquad (\mathrm{B.M7})$$

A (B. M6) leképezés egyben nem elfajuló is, azaz minden z_1-hez létezik olyan z_2 hiperbolikus szám, hogy

$$Im(\overline{z_1}z_2) \neq 0 \;\; ha \; \overline{z_1} \neq 0$$

A számsíkokon ez csak a nullosztóknál lehet kérdéses, de egy nem nulla nullosztó számot például egy valós számmal szorozva olyan számot kapunk szorzatként, melynek képzetes része nem 0, így teljesül a fenti összefüggés.

Ahhoz, hogy szimplektikus formának tekinthessük a (B. M6)-os leképezést, még azt kell belátnunk, hogy bilineáris leképezés is, de ez nyilvánvalóan adódik a kételemű számok összegzési és skalárral való szorzási eljárásaiból.

Így mindhárom számsíkon azonos módon definiálható egy szimplektikus bilineáris forma az

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\overline{z_1}z_2) \qquad (\mathrm{B.M8})$$

jelöléssel, és ennek a leképezésnek a számok koordinátáira átírt formája is azonos a három számsíkon, amint az (B.M1), (B.M2), (B.M3) egyenletek mutatják.

Az 1.1 pontbeli polárkoordinátákkal a ferde skaláris szorzat a következő a három számsíkon:

Hiperbolikus esetben

$$Im(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}||z_2|\, sinh(\tau_2 - \tau_1)$$

Parabolikus esetben

$$Im(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}||z_2|(sp\arg z_2 - sp\arg z_1) \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{l} \arg \mathrm{z} = \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \;\; \text{ha} \;\; \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathbf{j}\mathrm{y} \\ \text{és } \mathrm{sp}\arg \mathrm{z} = \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \end{array}$$

Komplex számsíkon

$$Im(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}||z_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

1.3 Geometriai szorzat

Érdemes egy külön jelölést bevezetni erre a speciális szorzatra, azaz egy szám konjugáltja és egy másik tetszőleges szám szorzatára:

$$\Pi(\mathrm{z_1}, \mathrm{z_2}) = \overline{\mathrm{z_1}}\mathrm{z_2} = \langle \mathrm{z_1}, \mathrm{z_2} \rangle + \boldsymbol{\delta}\, \omega(\mathrm{z_1}, \mathrm{z_2}) \quad \text{ahol} \;\; \boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \quad \mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = 0, \mathbf{k}^2 = +1 \qquad (\mathrm{B.M9})$$

A (B.M9) egyenletben szereplő függvényről a következő mondható el:

$$\Pi(z_1, z_2) = \overline{\Pi(z_2, z_1)} \qquad (\mathrm{B.M10})$$

Azaz a függvényben **z_1 és z_2 felcserélése a függvényérték konjugáltját eredményezi**. A (B.M9) egyenletbeli Π speciális szorzat a geometriai algebrában a vektorokra bevezetett **geometriai szorzat számsíkbeli megfelelője**.

C. Melléklet – Példa a belső szorzatra és a külső szorzatra egy speciális többelemű számrendszeren

$\overline{A}B$

a_0	$-a_1k_1$	$-a_2k_2$	$-a_3k_{12}$	b_0	b_1k_1	b_2k_2	b_3k_{12}
a_0b_0	$-a_1b_0k_1$	$-a_2b_0k_2$	$-a_3b_0k_{12}$				
$a_0b_1k_1$	$-a_1b_1$	$-a_2b_1k_{12}$	$-a_3b_1k_2$				
$a_0b_2k_2$	$-a_1b_2k_{12}$	$-a_2b_2$	$-a_3b_2k_1$				
$a_0b_3k_{12}$	$-a_1b_3k_2$	$-a_2b_3k_1$	$-a_3b_3$				

$\overline{A}B= a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+$

$k_1(a_0b_1-a_1b_0-a_2b_3-a_3b_2)+$

$k_2(a_0b_2-a_2b_0-a_1b_3-a_3b_1)+$

$k_{12}(a_0b_3-a_3b_0-a_1b_2-a_2b_1)$

$\overline{B}A$

a_0	a_1k_1	a_2k_2	a_3k_{12}	b_0	$-b_1k_1$	$-b_2k_2$	$-b_3k_{12}$
a_0b_0	$a_1b_0k_1$	$a_2b_0k_2$	$a_3b_0k_{12}$				
$-a_0b_1k_1$	$-a_1b_1$	$-a_2b_1k_{12}$	$-a_3b_1k_2$				
$-a_0b_2k_2$	$-a_1b_2k_{12}$	$-a_2b_2$	$-a_3b_2k_1$				
$-a_0b_3k_{12}$	$-a_1b_3k_2$	$-a_2b_3k_1$	$-a_3b_3$				

$\overline{B}A= a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+$

$k_1(-a_0b_1+a_1b_0-a_2b_3-a_3b_2)+$

$k_2(-a_0b_2+ a_2b_0-a_1b_3-a_3b_1)+$

$k_{12}(-a_0b_3+ a_3b_0-a_1b_2-a_2b_1)$

$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}(\overline{A}B + \overline{B}A) = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 +$

$k_1(-a_2b_3 - a_3b_2)$

$k_2(-a_1b_3 - a_3b_1)$

$k_{12}(-a_1b_2 - a_2b_1)$

$\omega(A, B) = \frac{1}{2}(\overline{A}B - \overline{B}A) =$

$k_1(a_0b_1 - a_1b_0)$

$k_2(a_0b_2 - a_2b_0)$

$k_{12}(a_0b_3 - a_3b_0)$