Két polárkoordináta invarianciája a speciális relativitáselméletben

A kételemű számok gyümölcsöző használata

*„Nem az ad élvezetet, hogy az ember valami újat teremt, hanem az, hogy rábukkan valami olyasmi gyönyörűségre, amely mindig is ott volt.” /**Richard Feynman** /*

1. Bevezető gondolatok

Régóta foglalkoztat a kételemű számok normája mellett az argumentum invarianciájának kérdése, mégpedig a számsíkokon értelmezhető alapvető forgatásoknál, azaz komplex számsíkon a klasszikus körforgás esetén, a parabolikus (duális) számsíkon egyenes eltolás esetén, a hiperbolikus számsíkon pedig egy egyenlőszárú – vagy másképp derékszögű – hiperbolán való „forgatásnál”, azaz **Lorentz** transzformáció esetén. A **Lorentz** transzformáció nem része a tapasztalatainknak, és még az is, aki valamelyest tájékozott a speciális relativitáselméletben, az is kétkedve fogadja e transzformáció szögtartását, hiszen a **Minkowski**-térben az ott értelmezett „távolság” invarianciájáról hallott már, de egy „szög” invarianciájáról nem.

1.1. A szögfogalomról klasszikusan és a kételeműek számsíkjain

A szög fogalmán általában azt a tartományt értjük, amelyet egy síkbeli pontból kiinduló két félegyenes zár be.[1] A szög mérésén pedig egy arányszámot értünk; a szög kezdőpontja körül írt egységsugarú körből a szög szárai által kimetszett ív hosszát. Lám, lám, a helyzet bonyolódik, a szög fogalmához elegendő volt a sík és az egyenesek fogalma, de a méréséhez már szükséges a kör fogalma is. Körvonalon azt a síkbeli ponthalmazt értjük, amelynek pontjai egy ponttól – a kör középpontjától – egyenlő távolságra vannak. Így a szög mérése függ két pont távolságának definíciójától és a kör fogalmától is.

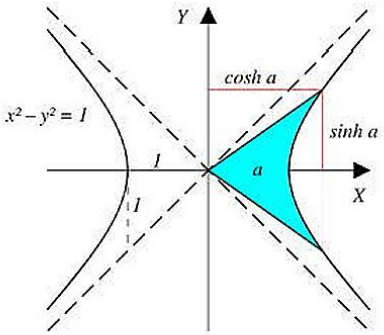
A kételeműeknél a normát egyfajta „távolságnak” tekintve, az egy ponttól egyenlő távolságra lévő számpontok halmaza kör a komplex számsíkon, párhuzamos egyenespár a parabolikus számsíkon és derékszögű hiperbola a hiperbolikus számsíkon. Így az előbb említett klasszikus szögfogalmat és mérést ezekre alkalmazva a szögek mást és mást jelentenek a számsíkokon. A komplex számsík szögfogalma megegyezik a klasszikussal, a parabolikus szöghöz egy egyenes szakasz mértéke, illetve egy háromszög területe társul, míg a hiperbolikus számsíkon egy derékszögű hiperbola íve, illetve egy ívhez tartozó terület a „szögmérték”.[2]

---

[1] A továbbiakban egyelőre csak síkszögről lesz szó, ha ettől eltérek, azt külön jelzem.
[2] Lásd az **A. Melléklet** végén szereplő ábrákat.

A geometriai algebra nagy öregje **David Hestenes**[3] helyesebbnek tartotta, ha a geometriai algebrában a szöget bivektorral, azaz a bivektorral modellezett komplex **i**-vel való szorzatával, **i**θ-val jellemezzük, így egy körív radiánban mért hossza helyett inkább a körív területéhez kötjük a fogalmat, hiszen a geometriai algebrában a bivektor előjeles területet jelöl. Probléma, hogy a körív radiánban mért hossza kétszerese a körívhez tartozó területnek. A radiánban való mérés elterjedtsége miatt **Hestenes** annak megtartását javasolja, de a szögnek a területi értelmezése mellett. Ez így egy kicsit zavaros, de számomra szimpatikus **Hestenes** törekvése az argumentum képzetes értelmezésére, mert a kételeműeknél ez magától értetődik. A terület, vagy ívelem-hossz értelmezés között még nem választottam, mert mindkettő hasznos valamilyen értelemben, de egyelőre egyiket sem látom hasznosabbnak a másiknál.

Korábbi írásaimban is több helyütt jeleztem, hogy a kételeműek számsíkjain az argumentum, tehát egyfajta szögmérték egy ívhosszal, vagy egy ívhez tartozó területtel egyenlő (klasszikus integrálást alkalmazva) mindhárom számsíkon az egységgörbére vonatkozóan, azaz kör esetén a komplexeknél, párhuzamos egyenespárra gondolva a parabolikusoknál és derékszögű hiperbolát tekintve a hiperbolikus számsíkon. Ez utóbbit az alábbi ábrán[4] szemléltetve, ahol az argumentum a színezett tartomány területével egyenlő:



Tehát a szögmérés a kételemű számok síkjain is visszavezethető egyenes, vagy görbe szakaszok mérésére, pontosabban ilyen szakaszok klasszikus mértékének arányára, illetve a hozzájuk rendelhető területek mértékére.

---

[3] Lásd „*A **Clifford** algebra, a geometriai algebra és a kételemű számok*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/332-a-clifford-algebra-a-geometriai-algebra-es-a-ketelemu-szamok

[4] Mindhárom számsíkról lásd az **A. Melléklet** végét és a *„Kételemű számok alaptulajdonságainak összehasonlítása"* című cikk 4. oldalát: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/15-ketelemu-szamok-alap-tulajdonsagainak-osszehasonlitasa

1.2. Szögmérés, azaz az argumentum mértéke a kételeműek számsíkjain

A fentiekben megnevezett argumentum, mint terület, vagy ívhossz, még a klasszikus mértékkel (integrálással) adódott. Ez ugyan segíti a képzeletünket, de az alkalmazott módszer, az integrálás így nem alkalmazható a kételeműeken, és nemcsak azért, mert nincsenek még bevezetve e számhalmazokon – a komplex számok kivételével – a kalkulusszámítások. Viszont a kételeműeken az argumentumszámítás korrekt definiálásából is látható, hogy szakaszmértékek arányát jelenti speciálisan. Ugyanis egy $\mathbf{z} = x + \boldsymbol{\delta} y$ kételemű szám esetén – ahol $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó – a parabolikusaknál az argumentum $\frac{y}{x}$, a komplex számoknál az argumentum *tangense* egyenlő $\frac{y}{x}$ -szel, azaz $\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi} = \frac{y}{x}$, a hiperbolikus számoknál pedig az argumentum *tangenshiperbolikusa*, azaz $\mathbf{th}\boldsymbol{\varphi} = \frac{y}{x}$. [5]

Ugyanakkor a képzetes argumentum jellemzése alapján, lásd az **A. Melléklet** (A.M12) képletét:

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln\sqrt{\frac{\bar{\mathbf{z}}}{\bar{\bar{\mathbf{z}}}}}$$

az argumentum egyrészt képzetes szám másrészt egy egységvektor logaritmusa a kételeműek számsíkjain, azonban e definíció éppúgy alkalmatlan az argumentum mérésére, ahogy korábban a szögfogalom sem volt rá alkalmas.

1.3. Norma és argumentum a kételeműeknél

Egy szó, mint száz, a kételeműek számsíkjain más és más a norma definíciója, és különböznek az argumentumok meghatározásai is. A számvektorok skalárszorzatának[6] definiálásával – amelyre igaz az, hogy a számvektorok önmagával való skalárszorzata a számvektor normanégyzetével egyenlő – definiálom a *merőlegesség* fogalmát, azaz két számvektor akkor merőleges, ha skalárszorzatuk 0-val egyenlő. Ez az egységes definíció geometriailag mást és mást jelent a három számsíkon, ugyanakkor egységesen igaz az algebrailag, hogy két számvektor akkor merőleges, ha az egyik egyenlő azzal a számmal, amelyet úgy kapunk, hogy a másik számvektort az adott számsík képzetesével – pontosabban a képzetes valós számszorosával – szorozzuk.[7] Ez jól ismert a komplex számoknál, hiszen ott egy számvektor m**i** képzetessel való szorzata a vektor klasszikus 90^0-os elforgatását és m-szeres nyújtását eredményezi. A parabolikus számoknál a skaláris szorzat akkor 0, ha a két számvektor valós elemének legalább az egyike 0, azaz a két számvektor legalább egyike tiszta képzetes szám. Ez is azt jelenti, hogy két számvektor akkor merőleges, ha az egyik a másik m**j**-szerese, ahol **j** a parabolikus képzetes és m valós szám. Hiperbolikus esetben pedig a skalárszorzat akkor 0, ha a két számvektor meredeksége egymás reciproka, ekkor a két számvektor olyan egyenesekre illeszkedik, amelyek egymás tükörképei az y=±x egyenesek egyikére vonatkozóan. Ebben az esetben az egyik számvektor a másik m**k**-szorosa, ahol m valós szám, **k** pedig a hiperbolikus képzetes. Természetesen nemcsak a meredekség, de általánosságban az argumentummal kifejezett szögfogalom is más és más a kételeműek három számsíkján. A számsíkok képzetesükben eltérő algebrái eltérő geometriát eredményeznek, így

---

[5] Lásd az **A. Melléklet**et.
[6] Ehhez lásd „*A szimplektikus teve „természetes előfordulásai”* című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/169-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai
[7] Lásd *A szimplektikus teve „természetes előfordulásai II.”* című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii

az egyes számsíkok szögtartó transzformációit sem szabad a szemléletünkhöz tapadt szögtartással azonosítani.

2. Az argumentum invarianciája a hiperbolikus forgatásra

A speciális relativitáselméletben **Einstein** abból a megfontolásból indult ki, hogy a természeti törvények megfogalmazásának egyenértékűnek kell lennie két inerciarendszer esetén, így a fényterjedés sajátosságának is. E követelmények és vele a speciális relativitáselmélet jól ismert folyománya volt, hogy inerciarendszerek esetén a **Lorentz** transzformáció írja le azt a módszert, amellyel az egyik említett rendszerben megfigyelt koordinátákról áttérek a másik rendszer koordinátáira. Ezekkel a koordinátákkal számított speciális négyesvektor-hossz egyenlő mindkét koordinátarendszerben. Kevés szó esik arról, hogy a **Lorentz** transzformáció, azaz a hiperbolikus forgatás speciálisan értelemben „szög"-tartó is, így a speciális relativitáselméletnek nemcsak egy invariánsa van a **Lorentz** transzformációra, hanem kettő; a *négyesvektor hossza* a téridőben, és a *négyesvektor egyfajta „szöge", azaz argumentuma*, ami nem más, mint a térvektor hosszát, mint térkoordinátát, és a térre merőleges időkoordináta-tengelyen az időkoordinátát tekintve az adott négyesvektor „hiperbolikus hajlásszöge" az időhöz. A hiperbolikus számsík ezt modellezi a teret egyetlen dimenzióra szűkítve.

A hiperbolikus számsík-modellt használva tekintsünk két koordinátarendszert, amelyek inerciarendszereket, azaz egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző rendszereket modelleznek, ezek egyikét „vesszős" elemekkel különböztetem meg. A 0 alsóindexszel jelölt vektor hiperbolikus egységvektor.

Legyen a vesszős elemekkel jelölt inerciarendszer sebessége $\mathrm{th}\varphi_0$, és z_0 egységvektorra

$$z_0 = x_0 + ky_0 = \cosh\varphi_0 + k\sinh\varphi_0 = e^{k\varphi_0} \tag{1}$$

A **B. Melléklet** utolsó két képlete (B.M7) szerint a hiperbolikus síkon modellezett **Lorentz** transzformáció a következő:

$$z = z'e^{k\varphi_0} \tag{2}$$

$$z' = ze^{-k\varphi_0} \tag{3}$$

Mivel a számok normája a **Lorentz** transzformáció esetén egyenlő – ez a **Lorentz**-távolság inerciarendszerekbeli invarianciájának megfelelője a hiperbolikus számsíkon – ezért legyen

$$z_1 = x_1 + ky_1 = \rho_1(\cosh\varphi_1 + k\sinh\varphi_1) \tag{4}$$

$$z_1' = x_1' + ky_1' = \rho_1(\cosh\varphi_1' + k\sinh\varphi_1') \tag{5}$$

Hasonlóan egy másik pontpárra:

$$z_2 = x_2 + ky_2 = \rho_2(\cosh\varphi_2 + k\sinh\varphi_2) \tag{6}$$

$$z_2' = x_2' + ky_2' = \rho_2(\cosh\varphi_2' + k\sinh\varphi_2') \tag{7}$$

A (2) alapján

$$z_1 = z_1'e^{k\varphi_0} \tag{8}$$

$$z_2 = z_2'e^{k\varphi_0} \tag{9}$$

ahol

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_0$$

$\varphi_2 = \varphi_2' + \varphi_0$

A (3) alapján pedig

$$z_1' = z_1 e^{-k\varphi_0} \tag{10}$$

$$z_2' = z_2 e^{-k\varphi_0} \tag{11}$$

A (8), (9), (10) és a (11) képletből következik, hogy vesszőtlen és a megfelelő vesszős számvektorok hányadosa egy állandó szám, hiperbolikus egységvektor. Két különböző vesszőtlen vektor, z_1 és z_2 számvektorok aránya pedig megegyezik vesszős megfelelőik arányával, hiszen képezve (8) és (9) egyenlet hányadosát, továbbá feltételezve, hogy $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1'}{z_2'} \tag{12}$$

(12-ből az (4), (5), (6), (7) felhasználásával a következő adódik:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cosh(\varphi_1 - \varphi_2) + k\sinh(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cosh(\varphi_1' - \varphi_2') + k\sinh(\varphi_1' - \varphi_2')) \tag{13}$$

A normákkal egyszerűsítve:

$$(\cosh(\varphi_1 - \varphi_2) + k\sinh(\varphi_1 - \varphi_2)) = (\cosh(\varphi_1' - \varphi_2') + k\sinh(\varphi_1' - \varphi_2')) \tag{14}$$

Két hiperbolikus egységvektor akkor egyenlő, ha az argumentumaik egyenlőek, azaz (14)-ből:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1' - \varphi_2' \tag{15}$$

Tehát a (15) alapján már látható, hogy a **Lorentz transzformációra nemcsak a norma invariáns, de az argumentum különbségek is egyenlők az inerciarendszerekben, így a mérés összehasonlító jellege miatt maguk az argumentumok is egyenlőnek mértek.**

Megjegyzés

A fentiekből is következik az, amit korábban a skalárszorzatból eredeztetett merőlegességgel kapcsolatban állapítottam meg, hogyha a szögkülönbségnek az x és y koordinátatengelyek argumentum-különbségeit vesszük, akkor ezek azonosan merőlegesnek mértek mind a vesszős, mind a vesszőtlen koordinátarendszerekben.

Így elmondható, hogyha a teret egy dimenzióra szűkítem – ezt megtehetem izotróp terek esetén, ami inerciarendszereknél adott – akkor **mindkét polárkoordináta invariáns a Lorentz transzformációra**.

Ugyanezek levezethetőek a komplex számsíkon a körmozgásra és a parabolikus számsíkon az egyenes menti eltolásra. Figyelem! Mindhárom számsíkon más és más a „szögfogalom”, mindig az adott számsíkon definiált argumentumot jelenti.

3. Összegzés és záró megjegyzések

Két inerciarendszer fizikai szempontból megkülönböztethetetlen, eldönthetetlen, hogy melyik mozog a másikhoz képest. A kételemű számsík használatával bebizonyosodott, hogy a polárkoordináták használata ugyanúgy megkülönböztethetetlenné teszi a matematikai leírásukat is, hiszen az egyikben *mért* norma azonos a másikban *mérttel* és az egyikben *mért* argumentum azonos a másikban *mérttel*. Így megfogalmazódik ismét az a sejtés, hogy a polárkoordináták „valóságosabbak” a **Descartes** koordinátáknál. De mit értünk valóságosabb alatt, és mit mérünk az egyes koordinátákkal? A **Descartes** koordináták egy ponttól, az origótól mérik egy adott pont két egymásra merőleges egyenesre való vetületének a távolságát. A polárkoordináták egyike, a norma egy adott pontnak az origótól való egyfajta

távolságát jelenti, az argumentum pedig az adott pontot jelentő számvektornak az egyik koordinátatengelytől – az időt reprezentáló valós tengelytől – való szögtávolságát fejezi ki. Ez utóbbival kapcsolatban érdemes arra gondolnunk, hogy az időt mindig valamilyen periodikus mozgással mérjük, és bár a hiperbolikus számsík hiperbolikus forgásának periódusát potenciálisan végtelennek gondolhatjuk, ugyanakkor a hiperbolaívhez tartozó argumentum könnyedén értelmezhető időnek, az idő egy „fázisának", hiszen véges periódusú mozgás használata esetén is így mérjük a „töredék" periódus alatt eltelt időt. Így az argumentum ebben az esetben is az időt méri! Azért használtam az „ebben az esetben is" szófordulatot, mert **Feynman** is időként interpretálta a komplex szám argumentumát a kvantumelektrodinamikát magyarázó könyvében[8], és a komplex argumentum 2π szerinti periodicitása miatt ennek időként való értelmezése kézenfekvő volt.[9]

Így a sejtésnél már többről van szó, amikor egy – komplex, parabolikus vagy hiperbolikus – téridőbeli pont polárkoordinátáit tartom a *tényleges* koordinátáinak. Korábban a „valóságosabb" szót használtam a tényleges helyett, és számomra mind a *tényleges* mind a *valóságos* koordináta azt jelenti, hogy ezeknek van fizikai jelentésük.

A **Descartes** koordinátákkal leírt **Lorentz** transzformáció – és ezzel az idő-dilatáció és hossz-kontrakció – az egyik inerciarendszer *téridő-perspektívája* egy másik inerciarendszerből tekintve. A valóságot viszont a polárkoordináták mutatják meg, azaz velük két inerciarendszerben ugyanazt az időt és hosszat mérjük, nincs idő-dilatáció sem hossz-kontrakció a valóságban, csak a *látványban*. Természetesen egy *tényleges* idő-dilatációval járó hossz-kontrakció is létező, tapasztalható jelenség, de csak gyorsuló rendszerek esetén, és ezzel az általános relativitáselmélet foglalkozik. Ebben a cikkben csak a speciális relativitáselmélettel leírt inerciarendszerekről volt szó.

---

[8] Lásd **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

[9] **Feynman** interpretációjáról részletesebben írtam a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*" című cikk 9. oldalán:
https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

A. Melléklet

A kételemű számok különböző alakjai

Emlékeztetőül a kételemű számokról és tulajdonságairól:

Egy **z** kételemű szám, ha

$$\mathbf{z} = \mathrm{x} + \boldsymbol{\delta}\mathrm{y} \qquad (\mathrm{A.M1})$$

ahol x és y valós számok, és a *számvektor koordinátáinak* nevezem ezeket a számokat, továbbá **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó.

A számok *polárkoordinátás* alakjához jutunk a következő módon:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad \mathrm{x} \neq 0 \text{ esetén} \qquad (\mathrm{A.M2})$$

A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom:

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad (\mathrm{A.M3})$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (A.\mathrm{M4})$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (A.M5)$$

Az (A.M3), (A.M4), (A.M5), egyenletekből egyszerű átalakítással juthatok a számok *polárkoordinátás* alakjához.

Legyen

$$\mathrm{x} = \varrho\ \mathrm{COS}\,\varphi \qquad (A.M6)$$

ahol COS az adott számsíkon értelmezett koszinusz függvény, azaz a klasszikus koszinusz függvény a komplex számsíkon, hiperbolikus koszinusz függvény a hiperbolikus számsíkon, és cp-vel jelölt függvény a parabolikus számsíkon, amelyre $\mathrm{cp}\,\varphi \equiv 1$ az egész számsíkon.[10]

Így a kételemű számok polárkoordinátás alakja a következő:

$$\mathbf{z} = \varrho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad (\mathrm{A.M7})$$

$$\mathbf{z} = \varrho(\mathrm{cp}\,\varphi + \mathbf{j}\mathrm{sp}\varphi) \qquad \text{a parabolikus (duális) számoknál} \qquad (\mathrm{A.M8})$$

$$\mathbf{z} = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{i}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (\mathrm{A.M9})$$

A számok *normájának* nevezzük ϱ-t, amelyre a következő összefüggések teljesüknek:

$$\varrho = \sqrt{\mathrm{x}^2 - \boldsymbol{\delta}^2\mathrm{y}^2} = \sqrt{\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}} \qquad (\mathrm{A.M10})$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}= **i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathrm{x} - \boldsymbol{\delta}\mathrm{y} \ \text{ ha } \quad \mathrm{z} = \mathrm{x} + \boldsymbol{\delta}\mathrm{y}$$

---

[10] A parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekre **cp [arg(z)] ≡ 1**, **sp [arg(z)] = y/x**, ahol **arg z = y/x**.

A kételeműeknél egy szám konjugáltja a szám inverzével is kifejezhető, ugyanis (A.M10)-ből következik, hogy $\varrho^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}$, azaz $\bar{\mathbf{z}} = \frac{\varrho^2}{\boldsymbol{z}}$, így az egységvektorok inverze a konjugáltjukkal egyenlő.[11]

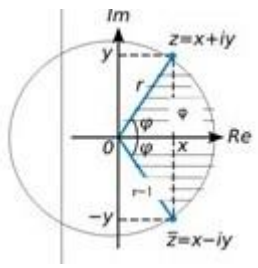
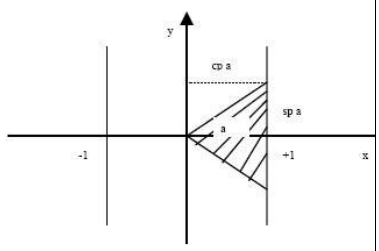
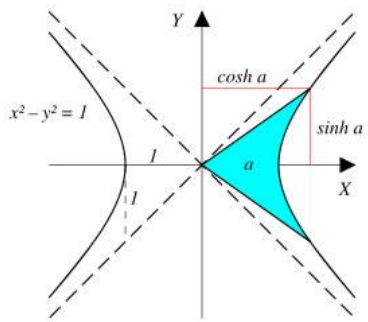
Mindhárom síkra egységesen felírható a következő *exponenciális alak*nak nevezett forma:

$$\mathbf{z} = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (\mathrm{A.M11})$$

Az (A.M11) exponenciális alakból egyszerűen levezethető a szám *képzetes argumentuma*

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln \mathbf{z} - \ln \varrho = \ln \frac{\mathbf{z}}{\varrho} = \ln \frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln \sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln \sqrt{\frac{\mathbf{z}}{\bar{\mathbf{z}}}} \qquad (\mathrm{A.M12})$$

Az argumentum egyúttal a számsíkok egység-görbéjének egy ívével, illetve egy ívhez tartozó területtel egyenlők, amint az alábbi ábrán[12] a satírozott, illetve színes síktartományok jelzik:

Komplex	**Parabolikus (duális)**	**Hiperbolikus**
		

A norma és az argumentum a szám *polárkoordinátái.*

[11] A geometriai algebrában az egyes konjugáltak a sorrendiséggel vannak kapcsolatban, ami abból következik, hogy báziselemek szorzatában a sorrendcsere előjelváltással jár. A kételemű számoknál a konjugált/inverz kapcsolat abból következik, hogy inverz-képzésnél a képzetes előjelet vált.

[12] Az ábrát egy nagyon régi anyagból emeltem át, lásd a 4. lábjegyzetben megnevezett anyagot.

B. Melléklet

Hiperbolikus függvények, majd hiperbolikus számok használata a téridő leírására

Az inerciarendszerek között a **Lorentz**-transzformációval leírt tér- és időkoordináták klasszikusan a következő egyenletrendszerekkel írhatóak le, ha egy K koordinátarendszerben a z koordinátatengely mentén v sebességgel mozgó K' inerciarendszerben „vesszős" koordinátákkal jelöljük a koordinátákat[13]:

$$z' = \frac{z - \frac{v}{c}tc}{\sqrt[2]{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(B.M1)

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}z}{\sqrt[2]{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Mélyebb elemzés helyett hivatkozom **Taylor-Weeler** „*Téridő-fizika*"[14] című könyvére, amelyben nagyszerűen levezetik a szerzők, és a geometriáját is jól szemléltetik a **Lorentz**-transzformációnak, amely sokkal szemléletesebb alakba hozható hiperbolikus függvények használatával. Így a (B.M1) egyenletek koordinátáira a következő összefüggést kapjuk:

$$z' = z\ \cosh\Theta - ct\ \sinh\Theta$$

(B.M2)

$$ct' = ct\ \cosh\Theta - z\ \sinh\Theta$$

Ahol Θ-ra az igaz, hogy

$$\tanh\Theta = \frac{z}{ct}\left(= \frac{v}{c}\right) \qquad \text{(B.M3)}$$

A (B.M1)-es képletek egy kicsit elrejtik, a (B.M2) egyenletekből viszont egészen jól *látható* a transzformáció jellege: **a koordinátatranszformáció egy hiperbolán való forgatást jelent, azaz hiperbolikus forgatást**. Ez a **hiperbolikus forgatás viszont nem térbeli, hanem téridőbeli**!

(B.M2)-ből z-re és ct-re:

---

[13] A legáltalánosabb **Lorentz**-transzformáció meglehetősen bonyolult, mivel mind a négy koordinátát kombinálja, de a K koordinátarendszert mindig definiálhatjuk úgy, hogy a z tengelye a K' rendszer mozgásirányába essék. Mondhatjuk azt is, hogy izotróp tér esetén – ami inerciarendszereknél adott – leszűkíthetem a teret egyetlen dimenzióra. Ez az egyszerűbb alak „a relativitás valamennyi lényeges vonását tartalmazza" (**Feynman**). A parabolikus esethez hasonlóan itt is azért választottam a szokásos x tengely helyett a z térbeli koordinátatengelyt, mert nem szeretném, ha zavart okozna a későbbiekben e **Minkowski**-sík koordinátatengelyeinek megfeleltetése a hiperbolikus számsík x és y koordinátatengelyeivel.

[14] Lásd például:
http://books.google.hu/books?id=9KfpAy3zEZkC&printsec=frontcover&dq=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&hl=hu&sa=X&ei=_cPhT6PaEcWr-gbBxOCcAw&ved=0CDkQ6wEwAA#v=onepage&q=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&f=false

$$z = z' \cosh\Theta + ct' \sinh\Theta$$

(B.M4)

$$ct = ct' \cosh\Theta + z' \sinh\Theta$$

Még a (B.M2)-es és (B.M4)-es egyenletrendszernél is egyszerűbben írható le a **Lorentz**-transzformáció a hiperbolikus számokkal.

A hiperbolikus számok **A. Melléklet**ben bemutatott tulajdonságai alapján már magától értetődő a modell. A (B.M4)-es egyenletbeli ct-nek a hiperbolikus számsík valós tengelyét, x-et, z-nek pedig a hiperbolikus képzetes tengelyt, y-t feleltetjük meg, azaz a valós tengely az időnek, a hiperbolikus képzetes tengely pedig az egyik térdimenziónak a modellje, (azaz ct→x, z→y). Ekkor a megfigyelő és a hozzá képest v sebességgel mozgó inerciarendszerbeli téridőpontok (események) viszonyára a következő összefüggést kapjuk a (B.M2) és (B.M3) figyelembevételével:

$$x' = x \cosh\Theta - y \sinh\Theta$$

(B.M5)

$$y' = y \cosh\Theta - x \sinh\Theta$$

Így a hiperbolikus számokra:

$$x' + \boldsymbol{k}y' = (x\cosh\Theta - y\sinh\Theta) + \boldsymbol{k}(y\cosh\Theta - x\sinh\Theta)$$

Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy:

$$x' + \boldsymbol{k}y' = (x + \boldsymbol{k}y)(\cosh\Theta - \boldsymbol{k}\sinh\Theta)$$

ahol

$$\cosh\Theta - \boldsymbol{k}\sinh\Theta$$

hiperbolikus egységvektor, így (A.M11) figyelembevételével:

$$x' + \boldsymbol{k}y' = (x + \boldsymbol{k}y)e^{-\Theta\boldsymbol{k}} \qquad (B.M6)$$

Tehát a **Lorentz**-transzformációnak a hiperbolikus számsíkon egy szorzás a megfelelője, mégpedig az eredeti számpontnak (téridő eseménynek) szorzása (B.M3) és (B.M6) figyelembevételével a $\tanh\Theta = \frac{v}{c}$ „meredekségű” egységvektor konjugáltjával.

A (B.M6) egyenlet még egyszerűbb formában írható fel, ha a hiperbolikus számvektorok koordinátás alakja helyett számvektoros jelölését használom, azaz

$$z = x + \boldsymbol{k}y$$

$$z' = x' + \boldsymbol{k}y'$$

jelölésekkel (B.M6), illetve annak átrendezéséből a következőket kapjuk a **Lorentz**-transzformáció hiperbolikus számokkal való modelljeként:

$$z' = ze^{-\Theta\boldsymbol{k}}$$

(B.M7)

$$z = z'e^{\Theta\boldsymbol{k}}$$