Az értelmezések fontosságáról, II. rész

A kvantummechanikai szuperpozíció, ahogyan én látom

1. Bevezetés

A szuperpozíció valamely lineáris egyenletekkel leírható fizikai mennyiség, – a kvantummechanikában (QM-ben) komplex állapotfüggvények – *összegzésének* tulajdonsága. Hogy pontos meghatározását adjam a QM-beli szuperpozíciónak, idézek az egyik klasszikus irodalomból:

„Tegyük fel, hogy a $\psi_1(q)$ hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban elvégzett mérés biztosan meghatározott eredményre – jelöljük 1-gyel – vezet, a $\psi_2(q)$ állapotban pedig a 2 eredményre. Ekkor ψ_1 és ψ_2 valamennyi lineáris kombinációja, vagyis minden $c_1\psi_1+c_2\psi_2$ alakú függvény (c_1 és c_2 állandó) olyan állapotot ír le, amelyben a mérés vagy az l, vagy a 2 eredményre vezet. Ezenkívül, ha ismerjük az állapotok időfüggését, melyet az egyik esetben a $\psi_1(q,t)$, a másikban a $\psi_2(q,t)$ függvény ír le, akkor ezek tetszőleges lineáris kombinációja szintén egy lehetséges időfüggését adja az állapotnak.

Ezekben az állításokban fejeződik ki az *állapotok szuperpozíciójának elve*, mely a kvantummechanika alapvető pozitív elve. Ebből többek között azonnal következik, hogy a hullámfüggvényre vonatkozó valamennyi egyenlet szükségképpen lineáris ψ-ben.” [1]

Következésképpen, amíg a klasszikus fizikában a *mérhető*, azaz *fizikai* mennyiségekre vonatkozik az összegzéseknek ez az elve, addig a QM-ben a *nem mérhető* hullámfüggvényre teljesül, ugyanis a *mérhető* valószínűségnek; a hullámfüggvény normanégyzetének összegzése nem lineáris egyenlethez vezet. Így megtévesztő „kvantummechanikai szuperpozícióról” beszélni, mert az általa megnevezett elv ugyan kvantummechanikai, de nem szuperpozíció klasszikus értelemben. Ha a komplex számok körében maradunk, tehát ha az *állapotok* komplex lineáris kombinációit tekintjük, akkor, és csak akkor beszélhetünk szuperpozícióról a QM-ben. Korábbi cikkemben[2] írtam arról a fontos tényről, hogy az egymást kizáró eseményekre a valószínűségek klasszikus összegzési szabálya

$$P = P_1 + P_2 \tag{1}$$

nemcsak a makrovilágban teljesül, de a jelenleg ismert kvantumfizikában, és az **Andrei Khrennikov** által hiperbolikus kvantumfizikának[3] nevezett modellben is, ha a P, P_1, P_2 számok

---

[1] **L. D. Landau – E. M. Lifsic**, *Elméleti fizika III. – Kvantummechanika*

[2] „*Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*”; http://www.infinitemath.hu/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

[3] Lásd például **Andrei Khrennikov**, „*Hyperbolic quantum mechanics*” című cikkét: http://arxiv.org/pdf/quant-

nem valós számokat jelölnek, hanem kételeműeket, azaz komplex számok a kvantumfizikában, hiperbolikus számok a hiperbolikus kvantumfizikában, és parabolikus számok a klasszikus esetben. Ezt figyelembe véve számítható[4] az (1)-ből az általános valószínűségi összegzés, melyben már valós számokat kapok mindhárom kételemű számsíkon, és ezek az értékek a *mérhető* valószínűséget adják:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\mathrm{COS}\Theta \qquad (2)$$

Ahol P, P_1, P_2 kételemű számok, $|\ |$ az adott számsíkon definiált normát jelöli, és Θ a P_1, és P_2 számvektorok által bezárt, az adott számsíkon értelmezett szög, a COS pedig az adott számsíkon értelmezett koszinusz függvény.

Tehát a QM-beli szuperpozíciós elv – amelynek egymást kizáró eseményekre használható formája az (1) egyenlet – csak a komplex számok körében valósul meg a kvantumfizikában, ugyanakkor csak a (2) egyenletben leírt – nem lineáris – összefüggések mérhetőek, és sokak szerint csak ezek, azaz a mérhető mennyiségek tekinthetőek a fizika tárgyának.

2. Dirac a szuperpozícióról

A kvantummechanikai szuperpozícióval kapcsolatos értelmezésem bemutatásában **Paul Dirac** *„The Principles of Quantum Mechanics”*[5] című monográfiájának néhány gyakorlati példáját fogom felhasználni.

Dirac a fent megnevezett művében a szuperpozícióról szóló első fejezetében végigtekint két speciális hullámjelenséget – a foton-elnyelést és a foton-interferenciát.

2.1. Foton-abszorpció

A síkpolarizált fénysugár turmalin kristályon való áthaladásának esetét akkor tartja problémásnak **Dirac**, ha a polarizáció síkja sem nem párhuzamos, sem nem merőleges a kristály optikai tengelyéhez viszonyítva, hanem azzal bizonyos α szöget zár be. Ekkor a fénynyaláb $\sin^2\alpha$ része halad át a kristályon, a többi elnyelődik. Mivel a síkpolarizált fénysugarat úgy tekintik, hogy valamennyi fotonja az adott síkban polarizált, ezért **Dirac** szerint problémát jelent egyetlen fotont tekintve az esemény: azaz mitől függ, hogy egy foton áthalad, illetve elnyelődik, ha a fénynyaláb tekintetében $\sin^2\alpha$ rész az áthaladó. **Dirac** itt megjegyzi, hogy időben egymás után hatalmas számú, de egy időben csak egyetlen fotont átengedve a kristályon, hasonló eredményt kapunk, és egyetlen foton vagy elnyelődik, vagy áthalad a kristályon teljes egészében. A kristályon átjutó/elnyelődő fénynyalábra kapott százalékos eloszlást **Dirac** átviszi egyetlen foton leírására, azaz egyetlen foton állapotát is szuperpozícióval leírhatónak gondolja, úgy *értelmezve*, hogy a kristállyal való találkozáskor a foton *kényszerítve*[6] van arra, hogy polarizációs síkja vagy paralel, vagy merőleges helyzetbe

---

ph/0101002v1.pdf

[4] A kételemű számokon, mint számvektorokon alkalmazott paralelogramma szabály felhasználásával adódik az eredmény.

[5] Pontosítva; **Dirac** *„The Principles of Quantum Mechanics”*, 1958-as 4. kiadásából.

[6] **Dirac** nem foglalkozik azzal, hogy a kristály „kényszere” miképp működik. Ezt mintegy a tudomány hatókörén kívülinek ítéli meg. *„Questions about what decides whether the photon is to go through or not and how it changes its direction of polarization when it does go through cannot be investigated by experiment and should be regarded as outside the domain of science.”* (Lásd az 5. lábjegyzetbeli cikket) Később azonban a kvantumelektrodinamika már értelmezi ezeket a folyamatokat is.

ugorjon a kristály optikai tengelyéhez képest, és az egyik esetben elnyelődik, a másik esetben átjut a kristályon. **Dirac** olyannak tekinti a kristályhoz képest ferdén polarizált fotont, mintha a polarizációja részben merőleges, részben párhuzamos lenne a kristály optikai tengelyével, tehát a ferde polarizációs állapotot úgy lehetne tekinteni, mint a párhuzamos és a merőleges polarizációs állapotok *szuperpozícióját*. Ezeregy problémát látok ebben a képben, de csak a legfontosabbakat emelem ki ezek közül. Érthetetlen számomra, hogyha **Dirac** a tudományon kívülinek tartja azokat az okokat, amelyek hol elnyelést, hol átengedést eredményeznek – lásd a 6. lábjegyzetet –, akkor miért nem fogadható el szimplán valószínűségi leírásnak a mérés eredménye.

Fontosnak tartom megemlíteni, hogy a szuperpozícióval leírt fénysugár nemcsak a fénynyalábra, de egy adott kristályra vonatkozóan is tartalmaz információt, hasonlóan ahhoz, amint egy objektum helymeghatározásánál a koordináták használata csak az adott koordinátarendszerhez viszonyítva adja meg az objektum helyét. A hasonlat persze sántít, hiszen a koordinátarendszer nem, a kristály viszont anyagi rendszer, és hat a fényre: egy részét elnyeli, a másik részét átengedi, miközben kölcsönhatásuk módosítja a fény polarizációját.[7] Tehát a kristály, mint környezet és a fénysugár kölcsönhatásának eredményét jellemzi az itt alkalmazott szuperpozíciós elv. Ha egy fotonra vonatkoztatjuk a szuperpozíciós leírást, akkor a + művelet „KIZÁRÓ VAGY” jelentésű. Így **számomra a kristályon áthaladó fotonra felírható valószínűségi képlet sokkal inkább a kristállyal, mint feltétellel leírt kolmogorovi *teljes valószínűség*, mintsem fizikai *szuperpozíció***.[8] Természetesen nevezhetjük ezt az állapotok szuperpozíciójának is, ahogy QM-alapelvként a **Landau-Lifsic** definíció is teszi, de nem szabad megfeledkezni arról sem, amit szintén ez a meghatározás tartalmaz, hogy a *mérés* valószínűségi szinten meghatározott eredményei egymást kizáróak, azaz a + összegzési jel a szuperpozícióban nem valamiféle együttlétezést jelöl, hanem „KIZÁRÓ VAGY” jelentésű, ahogy a kolmogorovi matematikában is. Az értelmezést az zavarhatja össze, hogy rendkívül sok részecske mérésekor – kvantumnyaláb esetén – ez a „KIZÁRÓ VAGY” jellemzés csak a nyaláb egyetlen kvantumára vonatkozhat, a sokaság állapotára viszont a valószínűségi összegzés már egyfajta együttlétezését jelenti a kvantumnyaláb különböző állapotú részecskéket tartalmazó rész-sugárnyalábjainak.

2.2. Foton-interferencia

Az interferencia szuperpozíciós értelmezésénél **Dirac** a fotonok hely- és impulzus-állapotából indul ki, amit egy fénysugár helyével és irányával, a transzlációs állapotával jellemez. Mivel a transzlációs állapot megfeleltethető a közönséges hullámoptika egy hullámfüggvényével, és a hullámfüggvény egy, vagy több fénynyalábot is leírhat, ezért a transzlációs állapot is szuperponálható, akárcsak a hullámfüggvény. Ettől kezdve homályos számomra, hogy **Dirac** miért ragaszkodott ahhoz, hogy a hullámfüggvény egy fotonra vonatkozó valószínűséget ír le, és nem a fotonok valószínű számát. A magyarázatában abból indul ki, hogyha a fénynyaláb intenzitása a benne lévő fotonok valószínű számával lenne összefüggésben, akkor két különböző foton találkozásakor vagy kioltják egymást, vagy megnégyszereződnek, ez pedig sérti az energia-megmaradás törvényét.

---

[7] Ha már hasonlat, akkor inkább azzal hozható párhuzamba ez a jelenség, amint **Einstein** általános relativitáselméletében az anyag által meggörbített téridő által modellezett a mozgás.

[8] **Andrei Khrennikov** is hasonlóan értelmezi a kétrés kísérlet valószínűségi leírását az általa *kontextuális valószínűség*nek nevezett megoldásában. (Lásd *Egy univerzális valószínűségszámítás felé, I. rész*; http://www.infinitemath.hu/matematika/356-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-i-resz)

Nem részletezem csak megjegyzem, hogy véleményem szerint az interferencia korrekt magyarázata[9] a részecske-tulajdonsággal is leírható. Az energia-megmaradás sérülése pedig csak két foton találkozásakor következhet be, de ehhez épp **Dirac** feltételezése szükséges, azaz ragaszkodása ahhoz, hogy a hullámfüggvény mindig egy fotonra vonatkozó valószínűséget ír le. Tehát **Dirac** azzal bizonyít, amit feltételez, így ez egyfajta circulus vitiosus. Nem szabad azt sem elfelejteni, hogy a részecskék állapotát *valószínűségi* szinten írom le, amely leírásban szerepelhetnek „reálisan valószínűtlen" állapotok is, amelyek végül nemcsak várhatóan, de matematikailag bizonyíthatóan is semlegesítik egymást. Ezzel szemben **Dirac** szerint a fotonok önmagukkal interferálnak, és két különböző foton sohasem interferál.[10] Sajnos nem magyarázza meg, hogy miképp interferál a foton önmagával úgy, hogy maga az interferenciakép is kialakul, az energia-megmaradás sem sérül, és a fotonokra vonatkozó kvantált jelleg is érvényes marad. Már megfogalmaztam egy korábbi cikkemben[11], hogy a hullámfüggvénynek nem kell olyan értelmezést adni, mintha az a fotonok lehetséges számára adna valószínűségi információt egy adott állapotban, ugyanakkor a hullámtulajdonságok megismerése, azaz *mérése* a kvantumok igen nagy sokaságának megfigyelését feltételezi. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy térben és időben intenzitást mérek, azaz nagyszámú kvantumok *számosságából* következtetek a valószínűségekre. A *mérések* pedig azt igazolják, hogy az interferenciaképben detektált kvantumok számából nem következik az energia-megmaradás törvényének sérülése.[12]

---

[9] Az interferencia értelmezése részecske-képpel azért nehézkes, ha nem lehetetlen, mert a klasszikus „ütközés" fogalma fotonokat tekintve elképzelhetetlennek tűnik. A sci-fi filmek lézerkardja technikai abszurditás. A részecskék klasszikus leírásában az egyenesvonalú mozgásukon kívül az ütközéseik matematikai modelljei játszanak szerepet, ezekkel a fogalmakkal kellene leírni a kvantummechanikai folyamatokat is, ha részecskékben gondolkodunk. Ha az interferencia kialakulását elektronokkal szemléltetem, akkor már nem hihetetlen a részecskeszerű ábrázolásban az ütközéseik – helyesebben egymáson való szóródásuk – modellezése az interferencia magyarázatául. Sőt, a fotonokhoz képest hatalmas tömegű elektronokat tekintve, ez még értelmezhetőbb kép is a hullámszerű kioltás/erősítés modellhez viszonyítva. Ugyanez a kép – ha nem is túl szemléletes – átvihető a fotonokra is, ha a fotonokat nem nullatömegűként kezeljük. A fotonoknak van *számítható* tömegük, még ha ez *mérhetetlenül* parányi is. Az interferencia maga is *mérés*, így a foton, mint részecske magyarázatában már nem teljesen irreális az irdatlan nagy sokaságú fotonok „találkozásakor" valamiféle szóródás feltételezése. Természetesen sokkal elfogadhatóbb a foton hullámtermészetének figyelembe vétele az interferencia leírásánál, ahogy az elektronnál viszont adekvátabb a részecske-jelleg szem előtt tartása. A **Bohr** által elgondolt komplementaritási elv alapján a kvantummechanikában a részecske- és hullámjelleg nem ellentétes, hanem egymást kiegészítő tulajdonságai az objektumoknak, és mérések, vizsgálatok során arra a jellegre érdemes fókuszálni, amely a legtöbb információt nyújtja az adott kérdésben. Mindenesetre elgondolkodtatónak, és nem teljesen elvetendőnek tartom **Dirac** energia-megmaradással kapcsolatos ellenérzését az interferenciának a kioltás/erősítés-féle hullámszerű magyarázatában. Összefoglalva; ha az energiamérleget tekintem, akkor mind az ütközés-modell, mind a kioltás/erősítés modell hiányos, ha éppen nem hibás az interferencia leírásában, mivel a részecske-modellbeli ütközések a fotonok esetében értelmezhetetlenek egyelőre, a hullámmodell pedig a „részecskeszerűbb" kvantumoknál – például elektronok esetén – magyarázza nehézkesen az energia-megmaradást retardált/avanzsált hullámok bevezetésével. Egyre inkább hajlok arra, hogy egy korrekt energiamérleg elérését nem részecske- *vagy* hullám-modell segítségével lehet megvalósítani, hanem részecske- *és* hullám-modell együttes alkalmazásával.

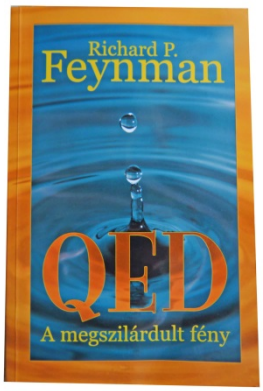
[10] *„On the assumption that the intensity of a beam is connected with the probable number of photons in it, we should have half the total number of photons going into each component. If the two components are now made to interfere, we should require a photon in one component to be able to interfere with one in the other. Sometimes these two photons would have to annihilate one another and other times they would have to produce four photons. This would contradict the conservation of energy. The new theory, which connects the wave function with probabilities for one photon, gets over the difficulty by making each photon go partly into each of the two components. Each photon then interferes only with itself. Interference between two different photons never occurs."* (Lásd az 5. lábjegyzetbeli cikket.)

[11] *„Egy univerzális valószínűségszámítás felé, II. rész"*; http://www.infinitemath.hu/matematika/360-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-ii-resz

[12] Ehhez lásd a *„Egy univerzális valószínűségszámítás felé, I. rész"* című cikket; http://www.infinitemath.hu/matematika/356-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-i-resz

3. Feynman pályaintegrál modellje és a szuperpozíció

A QM-beli szuperpozíció egy igen különleges fajtája **Feynman** pályaintegrál modellje. Ebben a szuperpozíciós elv használata nemcsak egy speciális kvantumállapotra, de a teljes téridő-történetre vonatkozik. A történet a konfigurációs tér[13] két fix pontja közötti lehetséges pályaként képzelhető el. A potenciális pályákhoz rendelhető amplitúdók – valószínűségi amplitúdók – összegzéséből kapjuk a kvantum-történet *totál* valószínűségi amplitúdóját. Magától értetődően, akkor beszélhetünk *valószínűségi* amplitúdókról, ha a *teljes* valószínűség 1-re normált. Az egyes esetek modellezése sokkal bonyolultabb mind fizikailag, mind matematikailag, mint amit eddig vázoltam. A bonyodalmakat csak nagy körvonalakban említve, például a legtöbb esetben nem egyszerűen diszkrét valószínűségekről van szó, hanem valószínűségsűrűségekről, továbbá a klasszikus alternatívák kontinuum-végtelenek, és a klasszikus pályák tere szinte mindig végtelen dimenziós. A klasszikus mozgásegyenletekben a **Lagrange**-formalizmust használva a részecske pályáját ott találjuk, amely pálya mentén számított hatás stacionárius (például a hatásintegrál[14] függvénynek minimuma van). A QM pályaintegrál modelljében azonban minden történetnek (pályának) van valamilyen valószínűsége, a szuperpozíciós leírás ezek mindegyikét tartalmazza. Ezt a leírást kell valami módon kapcsolatba hozni a **Lagrange**-formalizmussal, azaz kiemelni egy történetet (pályát) a **Hamilton** elvnek, azaz a legkisebb hatás – pontosabban stacionárius hatás – elvének megfelelően. Az ötlet az, hogy a stacionárius hatásintegrál által adott pályától „vadul” eltérő pályáknak az argumentumai nagyon különbözőek, és ezek átlagosan kinullázzák egymást az összegzésben. Így csak azok a stacionárius hatásintegrál által adott pályához közeli történetek maradnak meg, melyek argumentumai – pongyolán fogalmazva – egymáshoz hasonlóak. Ez tulajdonképpen az interferencia jelenség klasszikus hullám-magyarázatának a megfelelője, ahol az azonos fázisok erősítik, az eltérőek gyengítik, vagy kioltják egymást, csak itt a fázisok helyett a valószínűségi amplitúdók komplex argumentuma szerepel.



Közel áll a szívemhez ez a modell, mert felhívja a figyelmet arra, hogy a komplex valószínűségi amplitúdónak nemcsak a komplex normája határozza meg a valószínűséget, de az adott komplex szám argumentuma is szerepet játszik a valószínűségi leírás „működésében”, méghozzá olyan fontos szerepe van, hogy egyrészt vele magyarázható az interferencia-jelenség, másrészt a stacionárius hatás elvének QM-beli megfelelője is ezzel indokolható, amint a fentiekből kitűnik. Sokakban felmerült a kérdés, hogy van-e egyáltalán fizikai „jelentése” a valószínűségi amplitúdónak, amikor magát a valószínűséget a komplex norma-négyzet adja. Nos, itt a válasz: nagyon is fontos szerepe van a komplex szám polárkoordinátái közül nemcsak a normának, de az argumentumnak is, így magának a „teljes” komplex számnak, azaz a komplex valószínűségi amplitúdónak.[15] Ráadásul a kételeműek, így a komplex számok téridőt és egy speciális végtelent

---

[13] A konfigurációs tér maga a tér, ha azt a legegyszerűbb esetet tekintjük, hogy egyetlen pontszerű részecske mozog egy erőtérben. Ekkor a klasszikus történet egy folytonos görbe vonal a téridőben két fix esemény között. **Feynman** modelljében a görbe akármilyen lehet a **Minkowski** térben, például megengedett az időben „visszafelé” haladni.

[14] A hatásintegrál a **Lagrange** függvény időintegrálja. Ha egy részecske pályája a t idő függvényében x(t), sebessége ẋ(t), akkor a Lagrange függvény L[x(t), ẋ(t),t], a hatásintegrál pedig $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}[\mathrm{x}(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}), \mathrm{t}]\, dt$.

[15] Ezek a komplex polárkoordináták valamiképpen egyfajta tér- és idő-fogalmak a valószínűségi mezőben, ahol a „valószínűségi teret” a komplex norma méri, míg az időt a komplex argumentum. Erről nagyon érzékletes képet fest **Feynman** az ismeretterjesztő könyvében (**Richard Feynman**, *QED The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1988. Magyarul: **Richard Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Scolar Kiadó, 2003.).

modellező szerepe miatt már nemcsak sejthető, hogy egy állapot *valós* tulajdonságáról mond valamit az állapotfüggvény, de a konkrét „jelentéséről” is lehetnek elképzeléseink. Ennek kifejtése azonban túlmutat e cikk keretein, jövőbeli témáim egyike lesz. Véleményem szerint ez a pályaintegrál modell kulcsszerepet játszhat egy általános valószínűségi modell kialakításában, ezért a fentieknél sokkal részletesebben szeretném majd elemezni.

4. Zárszó

A QM-beli szuperpozíciós elvnek a *komplex* lineárisokra vonatkozó jellege, és a komplex számok, valamint általában a kételemű számok téridőt modellező szerepe azt jelzi nekem, hogy a szuperpozíciós elv feltehetően *minden* esetben azt jelenti, hogy a hatások „vektorszerű” összegzése a négyesvektorokra vonatkozik. Ez a szuperpozíció speciális esetére, a pályaintegrál modellre is igaz, ahol a komplexek polárkoordinátái modellezik a teret és az időt, pontosabban a négyesvektorokkal jellemezhető téridő viszonyokat.

(Egyéb értelmezéseimről a következő írások szólnak majd, elsősorban az összefonódásról, a rejtett változókról és a Bell-egyenlőtlenségről.)