

# Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához

*A kételemű számok normája, mint valószínűségi amplitúdó*

Amióta csak felfedeztem a kételemű számok családját és szoros kapcsolatukat a minőségi végtelennel és a téridővel, tervbe vettem<sup>1</sup>, hogy végiggondolom, vajon a komplex számok, mint valószínűségi amplitúdók, helyettesíthetőek-e a hiperbolikus és a parabolikus (duális) számokkal a kvantummechanikában, és milyen körülmények között kell az egyiküket, vagy a másikat használni.

Nagyon megörültem, amikor az interneten ráakadtam **Andrei Khrennikov** cikkeire<sup>2</sup>, melyekben bemutatja az általa hiperbolikus kvantummechanikának nevezett elméletet, melyben a hiperbolikus számokat vonja be a valószínűségek összegzésébe. Teóriájának használhatóságát többen vitatják<sup>3</sup>, de érdemes foglalkozni az elképzelésével, mert szerintem helyes általánosítását adja a valószínűségek számításának, és a kételemű számok felhasználásának.

## 1. Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikája

Nézzük, miképp jut el **Andrei Khrennikov** a hiperbolikus kvantummechanikájához. Nem fogom pontosan követni a szerző jelöléseit és matematikai levezetéseit<sup>4</sup>, mert egy fontos következtetés szemléletes megjelenését jobban segíti az általam választott leírás. A két leírás matematikailag egyenértékű.

Egymást kizáró eseményekre a valószínűségek klasszikus összegzési szabálya a makrovilágban a következő:

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

Ahol  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  pozitív valós számok. (A normálás kérdése nem túl fontos jelen tárgyalásom szempontjából, de mindig feltételezem, hogy 1-re normáltak a valószínűségek, ami (1) esetén azt jelenti, hogy  $P=1$ .)

Az (1) összefüggéssel szemben a kvantumfizikában az elemi részecskéknél a valószínűségeik összegzésére – a kétrés-kísérlettel szemléltethető interferenciára – az alábbi törvényszerűség működik a kísérletek alapján:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \cos \Theta \quad (2)$$

Ahol  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  komplex számok,  $||$  az abszolútértéket jelöli, és  $\Theta$  a  $P_1$ , és  $P_2$  komplex számvektorok által bezárt szög.

### Megjegyzések:

Látható, hogy miben tértem el a klasszikusnak mondható, és **Khrennikov** által is használt interferencia-leírástól; nem amplitúdóra, hanem intenzitásra írtam fel a képletet

<sup>1</sup> Lásd „A kvantumelmélet matematikájáról II.” című cikket; <http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/72-a-kvantumelm%C3%A9let-matematik%C3%A1j%C3%A1r%C3%B3l-ii.html>

<sup>2</sup> Lásd például: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0101002>

<sup>3</sup> Lásd például: <http://arxiv.org/pdf/1311.6461.pdf>

<sup>4</sup> Lásd a „Hyperbolic quantum mechanics” című cikket: <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101002v1.pdf>

a (2) összefüggésben.

Nagyon fontos látni azt, hogy az (1) összefüggés itt is igaz, csak a  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  komplex számokra értelmezve. A klasszikus valószínűség azonban, – és ez az, ami mérhető –, a (2) összefüggés alapján számítható, azaz komplex abszolútérték-négyzettel egyenlő. A normálást itt úgy kell érteni, hogy  $|P|^2=1$ .

Egy linearizáció után a (2)-ből a következőt kapjuk:

$$|P|^2 = \left| |P_1| + e^{i\theta} |P_2| \right|^2 \quad (3)$$

(Itt a négyzetgyökvonást azért nem érdemes végrehajtani, mert egyelőre csak az abszolútérték-négyzetnek van fizikai jelentése számunkra.<sup>5</sup>)

A fenti (3) egyenletben  $i$  a komplex képzetes egység, azaz  $i^2=-1$ . A (2)-ből a (3) egyenlethez úgy jutunk, hogy felhasználunk két ismert egyenlőséget:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , az abszolútérték pedig a komplex számok körében  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .<sup>6</sup>

**Andrei Khrennikov** oly módon általánosította a fentieket, hogy nem egy komplex **Hilbert** térből indult ki, hanem egy hiperbolikus **Hilbert** térből.<sup>7</sup> Ekkor a valószínűségek összegzésének módja, azaz a hiperbolikus interferencia leírása a következő:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \cosh \theta \quad (4)$$

Ahol  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  hiperbolikus számok és  $\theta$  a  $P_1$ , és  $P_2$  hiperbolikus számvektorok által bezárt hiperbolikus szög.

#### Megjegyzés:

Megismétlem, hogy az (1) összefüggés itt is igaz, csak a  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  hiperbolikus számokra értelmezve, és ebből vezethető le a (4) összefüggés, ahol már a valós számok körében számolhatunk.

A (4)-ből linearizáció után adódik a formula:

$$|P|^2 = \left| |P_1| + e^{k\theta} |P_2| \right|^2 \quad (5)$$

A fenti egyenletben  $k$  a hiperbolikus képzetes egység, azaz  $k^2=1$ . Az (4)-ből az (5) abból következik, hogy a hiperbolikus függvényekre  $e^{k\theta} = \cosh \theta + k \sinh \theta$ ,  $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ , a norma, pedig  $|z| = |x + ky| = \sqrt{x^2 - y^2}$ .<sup>8</sup> Szándékosan használtam a norma<sup>9</sup> kifejezést az abszolútérték helyett, mivel itt ez nem mindig pozitív valós szám, és a háromszög-egyenlőtlenségre

<sup>5</sup> A mai napig vitatott, hogy a komplex amplitúdó önmagában is fizikai jelentéssel bír-e, vagy csak segédeszköz az abszolútérték-négyzet kiszámítására. Ugyanis csak az utóbbit tudjuk jelenleg mérni, azaz ellenőrizni. Kvantummechanikailag minden olyan állapotot, amelyet egy részecske felvehet, komplex számokkal, mint súlyokkal figyelembe kell venni. A komplex súlyoknak a variációira a  $\psi$  függvényjelölést használják, mely a hely és az idő függvénye, és a részecske hullámfüggvényének nevezik. A  $|\psi|^2$  pedig a részecske megtalálási valószínűség-sűrűsége. A kérdést úgy teszik fel, hogy vajon a részecske mindig egyetlen adott állapotban – például adott helyen és időben – létezik, ahogy a mérésnél tapasztaljuk, vagy a mérések között az összes lehetséges állapotot felveszi, azaz például több helyen van egyszerre. Szerintem a kérdés-feltevés pontatlan, ezért nincs még egyértelmű válasz. De erről majd máskor.

<sup>6</sup> Bár nem tartozik szorosan a témához, de fontos megjegyezni a (3) képlettel kapcsolatban, hogyha az egységnyi abszolútértékű  $e^{i\theta}$  komplex számmal szorzunk, akkor az abszolútérték nem változik. Ez lényeges a hullámtanban, mert így egy hullámfüggvény és annak  $e^{i\theta}$ -szerese fizikai szempontból egyenértékű. Ebből következik a kvantummechanika *mérték-invariancia* elve.

<sup>7</sup> Ennek részleteit lásd **Khrennikov** „Hyperbolic quantum mechanics” című cikkében: <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101002v1.pdf>

<sup>8</sup> Itt is igaz, hogy az egységnyi hiperbolikus normájú  $e^{k\theta}$ -val szorozva a norma értéke nem változik.

<sup>9</sup> Tulajdonképpen normának sem nevezhetném a szakirodalomban elterjedt definíciók alapján, de egyéb tulajdonságai miatt mégis annak nevezem, mert nem akartam új elnevezéssel ellátni.

is mást mondhatunk (lásd a **Melléklet** 2.2 pontját). Egyelőre azokkal a megszorításokkal alkalmazhatjuk a fentieket, amelyek megegyeznek a **Melléklet** M9 képlete után megfogalmazottal.

## 2. A mostohagyerek parabolikus számok

Mielőtt szólnék a valószínűségszámítás és ennek folyományaként a hullámelmélet valószínűségi leírásával kapcsolatos problémáimról, és megjegyzéseimről, feltétlenül meg kell említenem, hogy **Khrennikov** tárgyalása nem teljes. Korábbi cikkemben<sup>10</sup> írtam arról, hogy a kvadratikus formával ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós **Clifford**-algebrákat a kételemű számok számsíkjai reprezentálják. Így annak mintájára, amint **Khrennikov** értelmezte a hiperbolikus **Hilbert** teret, beszélhetünk *parabolikus Hilbert*-térről is. A valószínűségek összegzése, azaz a parabolikus interferencia leírása a következő szabállyal írható itt le:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \text{ cp } \Theta \quad (6)$$

A fenti egyenletben  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  parabolikus<sup>11</sup> számok,  $\Theta$  a  $P_1$ , és  $P_2$  parabolikus számvektorok által bezárt parabolikus szög, és  $\text{cp}$  a koszinusz függvény megfelelője a parabolikus számsíkon.

### Megjegyzés:

Megismétlem, hogy az (1) összefüggés kezdettől fogva igaz itt is, csak a  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  *parabolikus* számokra értelmezve.

A (6)-ból következik:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| = \left| |P_1| + |P_2| \right|^2 \quad (7)$$

Itt a linearizációra nem is volt szükség, mivel a parabolikus koszinusz függvényre  $\text{cp } \Theta \equiv 1$ .

A (7) egyenlet is felírható olyan alakban, mely a parabolikus képzetes egységet is tartalmazza:

$$|P|^2 = \left| |P_1| + e^{j\Theta} |P_2| \right|^2 \quad (8)$$

A fenti egyenletben  $j$  a parabolikus képzetes egység, azaz  $j^2=0$ . A (7)-ből a (8) egyenlősége abból következik, hogy parabolikus függvényekre  $e^{j\Theta} = \text{cp } \Theta + j \text{ sp } \Theta = 1 + j\Theta$ , a norma, pedig  $|z| = |x + jy| = x$ . A norma negatív értékeket is felvehet, ezért a parabolikus számok fizikai használatánál is megszorításokat kell alkalmazni, csak olyan parabolikus számokra szorítkozom egyelőre, melyeknél a szám valós része nem negatív.<sup>12</sup>

A (7) egyenletekből kiemelem a következőt:

$$|P|^2 = \left| |P_1| + |P_2| \right|^2 \quad (9)$$

Ehhez a (9) összefüggéshez a (6), (7), (8) „bonyodalmai” nélkül is eljuthattam volna, hiszen a megjegyzésben említettek miatt már a parabolikus összegből képzett parabolikus abszolútérték-négyzet a (9)-et eredményezi. A (6), (7), (8) összefüggéseket csak azért írtam le, hogy bemutassam; ezek itt is igazak a komplex, és a hiperbolikus esethez hasonlóan.

A (9) összefüggés után kell megjegyezniem, hogy a fizikai jelentésén túl, miért is ragaszkodtam a „négyzetes-szabályból” kiindulni a levezetések során. Ha **Khrennikov** hivatkozott cikkében használtak megfelelő matematikát használok, azaz intenzitások helyett az amplitúdókra írom fel az interferencia-képletet, akkor a (9) egyenlet helyett  $P = \left| \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} \right|^2$  egyenlethez jutok, és bár

<sup>10</sup> Lásd „*A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen*” című cikk 2.1 pontját:

<http://infinitemath.hu/index.php/matematika/item/199-a-geometriai-algebr%C3%A1ban-rejt%C5%91zk%C3%B6d%C5%91-v%C3%A9gtelen.html>

<sup>11</sup> **Parabolikus, vagy duális számok** alapvető tulajdonságait lásd a **Melléklet** 1. pontjában.

<sup>12</sup> Itt is igaz, hogy az egységnyi parabolikus normájú  $e^{j\Theta}$ -val szorozva egy számot, a norma értéke nem változik.

ebből is látszik, de csak áttételesen az, ami a (9)-ből és a parabolikus számok norma-definíciójából<sup>13</sup> azonnal nyilvánvaló. A **klasszikus valószínűségi összegzést, az (1) egyenletet kaptuk itt meg**, ha a parabolikus számokat azokra korlátozzuk, melyeknek valós eleme nem negatív. Ezekre ugyanis  $P$ ,  $P_1$  és  $P_2$  pozitív valós számok, így a normájuk is az, tehát elhagyhatóak az abszolútérték-jelek a (9) egyenletben, és  $P=1$  is igaz, valamint egy – most már elvégezhető – gyökvonás után megkapjuk az (1)-et.

Így elmondható, ami – szerintem – a legfontosabb a fenti levezetésekben, hogy **a parabolikus valószínűségi amplitúdók összegzési szabályát alkalmazva a klasszikus valószínűségi számításokkal megegyező összefüggéshez jutottam**. Érdekesség, és nagyon elgondolkodtató, hogy az (1) egyenletet parabolikus számokra felírva nem kapjuk meg az azonosságot, de a négyzetes szabályt alkalmazva a parabolikus számokra, és a műveleteket elvégezve, *viSSzakapjuk* a klasszikus valószínűségi összefüggést valós számokra.

### 3. Egy univerzális valószínűségszámítás és hullámmélelet körvonalai

A fentieket összegezve közös leírását adhatjuk a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus valószínűségek összegzési szabályának. Egyelőre nem tudom, hogy léteznek-e azok a fizikai jelenségek, melyeket a hiperbolikus valószínűségi amplitúdókkal írhatok le. Azt viszont jól tudom, hogy a komplex valószínűségi amplitúdók sikeresen használhatóak a kvantummechanikai jelenségek leírásában, és a parabolikus valószínűségi-amplitúdók bevezetésével a közönséges valószínűségek számításait kaptuk vissza. (A kételemű számok néhány fontos tulajdonságát és felhasználását a **Melléklet 1.** pontja tartalmazza.)

A fenti (3), (5), (8) képletekből **a valószínűségek összegzési szabályának globális alapegyenlete** a következő:

$$|P|^2 = \left| |P_1| + e^{\delta\theta} |P_2| \right|^2 \quad (10)$$

Ahol  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  komplex, parabolikus vagy hiperbolikus szám attól függően, hogy  $\delta$  a komplex, parabolikus vagy hiperbolikus képzetes egység, azaz  $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  melyekre  $\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{k}^2=1$ .

A mai elképzelések alapján minden objektumnak van hullámtermészete, így a valószínűségekre vonatkozó fenti *globális* képlet alapján a hullámmechanikát is ki lehetne terjeszteni valamennyi objektumra. A fentiekből az is következik, hogy a háromféle valószínűségi összegzés egyenértékű; egyik sem származik a másikból, de sejtetően „azonos származásúak”.<sup>14</sup> A kételemű számok tulajdonságai – eltérései és azonosságai – már sokat sejtetnek a hullámmechanikai valószínűségek közös alapjáról, de egy eszköz nagyon hiányzik az alapok megismerésére; egy olyan számrendszer, amelynek része mind a három kételemű számsík. A geometriai algebra euklideszi térből generált **Clifford** algebrai „majdnem” megfelelőek erre, hiszen a kételemű számok számsíkjai reprezentálják az egyszimmetrikus, kvadratikus normával ellátott térből generált kétdimenziós **Clifford**-algebrákat. Viszont az egynél több véges dimenziós tér által generált **Clifford**-algebrákkal nekem több problémám is van, ezek egy részére már tettem utalást<sup>15</sup>.

<sup>13</sup> Lásd a **Melléklet M6** képletét.

<sup>14</sup> **Andrei Khrennikov** más utat bejárva hasonló következtetésre. Lásd; **Khrennikov**, *Classical and quantum spaces as rough images of the fundamental prespace*; <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0306069v1.pdf>

<sup>15</sup> Lásd a „*Problémák a geometriai algebrában*” című írást;

<http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/197-probl%C3%A9m%C3%A1k-a-geometriai-algebr%C3%A1ban.html>

## 4. További megjegyzések

Mivel a valószínűségek összegzését a kételemű számok segítségével lehet szemléletesen leírni, ezért érdemes ezeknek a számrendszereknek a tulajdonságai és egyéb felhasználási területei szempontjából megvizsgálni a valószínűségeket.

### 4.1 Valószínűségek összegzése

A (2), (4) és (6) – koszinusz függvényt tartalmazó – négyzet-összegek nem mások, mint az egyes számsíkokon a klasszikus *koszinusz-tétel* megfelelői, azaz egy általános háromszög oldalaira és egyik szögére vonatkozó összefüggés az egyes számsíkokon. Ez pontosan azt jelenti, hogy két lehetséges állapot valószínűségeinek összegzése számvektorok összeadásából származik, és az eredő-vektor nagyság-négyzetének kiszámítását jelenti. Ez nemcsak két valószínűség, és így két vektor, hanem akárhány összegzése tekintetében is igaz:

$$|P|^2 = \sum_i |P_i|^2 + 2 \sum_{i < j} |P_i| |P_j| \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (11)$$

Ahol COS a koszinusz függvények megfelelője az egyes számsíkokon.

### 4.2 Valószínűségek és a háromszög-egyenlőtlenség

Mivel a (2), (4) és (6) egyenletek vektorok összegzését szemléltető háromszög-oldalak hosszúságára felírt összefüggések az egyes számsíkokon, ezért igaz rájuk az a háromszög-egyenlőtlenség, amelyet a **Melléklet** 2.2 pontja tartalmaz. Így az egyes számsíkokon igazak a következők:

- **Komplex számsíkon** az egész számsíkra, ahol  $P, P_1, P_2$  komplex számok:

$$|P| \leq |P_1| + |P_2| \quad (12)$$

- **Parabolikus számsíkon** a számsíknak arra a felére, ahol  $P, P_1, P_2$  parabolikus számok valós része nem negatív szám:

$$|P| = |P_1| + |P_2| \quad (13)$$

- **Hiperbolikus számsíkon** a számsíknak arra a síknegyedére, melynél  $P, P_1, P_2$  hiperbolikus számok valós része nem negatív szám, és a számvektorok meredekségének abszolútértéke kisebb, mint egy:

$$|P| \geq |P_1| + |P_2| \quad (14)$$

A fentiekből messzemenő következtetések vonhatók le, de ezek tárgyalását későbbre halasztom. Annyit azért már itt is érdemes megjegyezni, hogy a komplex valószínűségi amplitúdók a kvantummechanika, a parabolikusak pedig a közönséges környezetünk valószínűségi számításaihoz kapcsolódnak. Egyedül a hiperbolikus számokhoz kapcsolódó valószínűségekkel nem találkoztunk eddig a gyakorlatban, a (14) egyenlőtlenség viszont sokat elárul a használhatóságukról. **Khrennikov** első cikkeiben hiperbolikus kvantummechanikának nevezte ezt a matematikát, és elismerte, hogy felhasználási területe egyelőre ismeretlen. Későbbi cikkeiben már – véleményem szerint – jó helyen tapogatózik, a kvantumelmélet „információs jellege” érdekeli, és a fizikán túli területek felé fordul.<sup>16</sup> Bele-bele olvastam ilyen irányú cikkeibe, de ezeket nem tudom még kommentálni. Első megérzésem szerint nem

<sup>16</sup> Lásd pl. **Khrennikov**; *Quantum-like Probabilistic Models outside Physics*; <http://arxiv.org/pdf/physics/0702250.pdf>



is annyira az a kérdés, hogy egy rendszer fizikai-e, vagy fizikán túli, hanem inkább az adott rendszer entrópia-változása a lényeges. Hozzáteszem, hogy én az információt is fizikai létezőnek tartom, így a hozzá kapcsolódó változásokat is a fizikaiak közé sorolom, még ha ez nem is széles körűen elfogadott nézet. Ennek megfelelően én az entrópia-változástól függően használnék valamilyen valószínűségi modellt, így; komplex valószínűségi amplitúdóval számolnék ott, ahol az entrópia növekszik a változás során, hiperbolikussal, ha az entrópia csökken, és parabolikussal ott, ahol az időbeli folyamatok megfordíthatóak.

Nagyon kíváncsi vagyok, hogy mi az igazság. Az viszont biztos, hogy – amint említettem – **szükség lenne egy olyan matematikai modellre, ahol a háromféle kételemű számot; a komplexet, a parabolikusát és a hiperbolikusát egy számrendszeren belül tudnám kezelni.**

### 4.3 A valószínűségek a kételemű számok végtelen-összefüggéseinek tükrében

A kételemű számok képzetes részének végtelen-értelmezése és a valószínűségszámítás közötti kapcsolatot is egyelőre csak ötletszinten közelítem meg. Ebből a szempontból a valószínűségek vonatkozó (12), (13) és (14) egyenlőtlenségek fontosak, és az a heurisztikus megközelítés, amit korábbi cikkemben<sup>17</sup> leírtam a képzetes rész, mint intenzív végtelenmodell kapcsán. Ez a 0,999... szám és az 1,000... szám közötti egyenlőség/egyenlőtlenségről szól, és ezek egy-egy variációjának a kételemű számok képzetes részével való modellezéséről. Ha a (12), (13) és (14) egyenlőtlenségekben szereplő valószínűségek normáltak; az összegvalószínűség abszolútértékére  $|P|=1$ , a lehetséges két alternatíva valószínűségeire pedig  $|P_1|<1$ , és  $|P_2|<1$ , akkor könnyen összekapcsolható a valószínűségek közötti háromszög egyenlőtlenség egy adott állítása a 0,999... szám és az 1,000... szám közötti egyenlőség/egyenlőtlenség egyikével. (Például  $|P_1|=0,333...$  és  $|P_2|=0,666...$  esetén csak a parabolikus esetben áll fenn egyenlőség az eredő valószínűség abszolútértéke és a lehetséges alternatívák valószínűség-abszolútértékeinek összege között.)

### 4.4 A valószínűségek a kételemű számok téridő-értelmezésének tükrében

Említettem már korábban<sup>18</sup>, hogy az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika egyesítésének az az egyik – és lehet, hogy a legnagyobb – akadálya, hogy az általános relativitáselmélet egy **háttérfüggetlen** leírás, ami azt jelenti, hogy a tér és az idő dinamikusan változik az anyagtól függően, míg a kvantummechanika eseményei egy időben változatlan geometriájú klasszikus téridő háttérén íródnak le. Itt meg kell jegyezni, hogy már az „anyag- és így gravitáció-mentes” speciális relativitáselmélet sem a klasszikus newtoni teret és időt fogalmazza meg. **A hiperbolikus számsík a speciális relativitáselméletbeli téridő geometriájának topológiáját ábrázolja nagyon szemléletesen, ha a teret egy dimenzióra szűkítem.** Ha ennek mintájára mindegyik kételemű számsíkot, így a komplex számsíkot is a tér és az idő egyfajta topológiai modelljének tekintem, akkor – rejtve a kvantummechanika komplex valószínűségi amplitúdóiban – valamiféle speciális (komplex) téridő-függvényt rendelünk a klasszikus térhez és időhöz, mint háttérhez. Van-e kapcsolat a valószínűségek komplex síkja, mint egyfajta fiktív téridő és a részecske mozgásának valós tere és ideje között? Örült kérdésnek hangzik, hiszen a fiktív komplex téridő elemeinek hossznegyzetei

<sup>17</sup> Lásd „A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen” című cikk 2. oldalának a középső részét; <http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/199-a-geometriai-algebr%C3%A1ban-rejt%C5%91zk%C3%B6d%C5%91-v%C3%A9gtelen.html>

<sup>18</sup> Lásd „Az idő, a tér és a végtelen” című cikk 5.2 pontjának 5. pontját a 20. oldalon; <http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/88-az-id%C5%91-a-t%C3%A9r-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html>

csak súlyozzák – azaz „minősítik” – az igazi téridőben történekről szóló tudásomat.<sup>19</sup> Miképp mondhatnának bármit is a mikrovilágban zajló események „valódi” teréről és idejéről azok az összefüggések, melyek egy-egy részecske lehetséges állapotainak – például egy adott időben való helyének – valószínűségéről szólnak. Ha a valószínűségek között van olyan összefüggés, mely teljesen független egy adott részecskétől és annak állapotaitól, akkor a fiktív téridőnek ezek az összefüggései magáról a valódi téridőről kell, hogy mondjanak valamit. És ilyen kontextusok bizony vannak, hiszen épp ezek azok az összefüggések, melyekben eltérnek a mikro- és a makrovilág valószínűségi szabályai, tehát az, hogy a valószínűségek összegzésénél a kételemű számok mely fajtáját kell használnom. Ennek a gondolatmenetnek megfelelően szerintem a valószínűségi amplitúdókat leíró kételemű számok síkjainak, mint egyfajta téridőnek a jellemzői a valós téridő tulajdonságait tükrözik. Ennek megfelelően a kvantummechanika klasszikus tér- és idő-háttérét éppúgy helytelen használni, amennyire helytelen a newtoni téridő a fénysebesség-közeli mozgások leírására. **Azt állítom ezzel, hogy a tapasztalatból szerzett valószínűségi összegzési szabály a kvantummechanikában alapvetően a mikrovilág valós térídejének sajátosságait érzékelteti és a valószínűségek egyedi viselkedését csak áttételesen tükrözi.** Azért nem igazán nyilvánvaló mindez, mivel a komplex számoknál a számvektorok több tulajdonsága (például abszolútértéke, vagy folytonossági definíciói) matematikailag azonosak az euklideszi vektorterekben definiáltakkal.

A fentiek a speciális relativitáselméletnek a mikrovilágbeli megfelelőjéről szóltak egyelőre, és arról is csak sejtéseket fogalmaztak meg. Most már harmadszor ismétlem meg ebben a kis írásban, hogy óriási szükség volna a kételemű számok közös számrendszerére. Szerintem csak ez segíthet a valóság adekvát és univerzális – azaz a mikro- és makrovilág közös – leírásához.

#### **Zárójeles megjegyzések:**

A fentebb említett sejtésem szerint nem a méretek közötti különbség a lényeges a valószínűségek összegzésénél, hanem az események során bekövetkező entrópia-változás. A kvantummechanikában azért használunk komplex számokat az amplitúdóknál, mert az interferencia – és vele együtt minden mérés – során az entrópia növekszik, hiszen információ semmisül meg. Ezt fejezi ki a komplex amplitúdókra felírt (12) háromszög egyenlőtlenség. A kételemű számok közötti választás entrópia-függése viszont ellentmondani látszik annak, amit a valószínűségi amplitúdók normájának téridő-leíró jellegéről írtam. Ez az ellentmondás azonban feloldható, ha minden téridőre úgy tekintek, mint az általános relativitáselmélet, azaz a téridő dinamikusan változik az anyagától függően. A kvantumvilág anyagi eseményei során olyan beavatkozások – interferenciák – következnek be, melyek információ-törléssel, így entrópia-növekedéssel járnak. Ezért kell a komplex számokat használni az amplitúdóknál a mikrovilágban a részecskék/hullámok egymást zavaró térídejében.

---

<sup>19</sup> Az úgynevezett „valódi” téridő sem más, mint a világ rendezettségéről szerzett információink összessége, mely a saját mozgási lehetőségeinket is tartalmazza. Ebben az értelemben a valószínűségek által leírtak sem mások, és csak az információ megbízhatóságában van különbség közöttük.

## Melléklet

### 1. A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy  $z$  kételemű szám, ha

$$z = x + \delta y = x \left( 1 + \delta \frac{y}{x} \right) \quad (M1)$$

Ahol  $x$  és  $y$  valós számok,  $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ( $\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{k}^2=1$ ) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál  $\frac{y}{x} = \mathbf{tg}\varphi$ , a hiperbolikus számoknál pedig  $\frac{y}{x} = \mathbf{th}\tau$  bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \mathbf{i} \tan \varphi) = \varrho(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \quad (M2)$$

$$z = x \left( 1 + \mathbf{j} \frac{y}{x} \right) = \varrho(\mathbf{cp} \varphi - \mathbf{j} \mathbf{sp} \varphi) \quad \text{a parabolikus számoknál} \quad (M3)$$

$$z = x(1 + \mathbf{k} \tanh \tau) = \varrho(\cosh \varphi + \mathbf{i} \sinh \varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \quad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta \varphi} \quad (M5)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \delta^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$
$$\delta \varphi = \ln z - \ln \varrho = \ln \frac{z}{\varrho} = \ln \frac{x + \delta y}{\sqrt{x^2 - \delta^2 y^2}} = \ln \sqrt{\frac{x + \delta y}{x - \delta y}} = \ln \sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \quad (M6)$$

Ahol  $\delta$ , mint fent, azaz  $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ( $\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{k}^2=1$ ) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és  $\bar{z}$  a  $z$  konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \delta y \quad \text{ha} \quad z = x + \delta y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekre  $\mathbf{cp} [\arg(z)] \equiv \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{sp} [\arg(z)] = \mathbf{y/x}$ , ahol  $\mathbf{arg} z = \mathbf{y/x}$ .

### 2. Geometriai elemek a kételemű számok síkjain

#### 2.1 A szorzás képe

Mindhárom számsíkon a számok **szorzásánál** a normák szorzódnak, az argumentumok összeadódnak, és az egységvektorok szorzása egy-egy fizikai mozgást ír le:

1.1 körmozgást a komplex számoknál,

1.2 egyenes menti eltolást a parabolikus számoknál,

1.3 hiperbolikus forgatást – azaz Lorentz-forgatást – a hiperbolikus számoknál.



## 2.2 Az összeadás képe

E számok **összeadás**ának síkbeli képe vektorok összeadása, tehát a paralelogramma-szabályt követi. Az azonos előjelű, valós normájú kételemű számokra felírható háromszög-egyenlőtlenségeknek érdekes az eltérése:

$$1. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (M7)$$

a **komplex** számoknál az egész számsíkon,

$$2. \quad |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad (M8)$$

a **parabolikus** számoknál a számsík azon felén, melyekre a szám valós része nem negatív,

$$3. \quad |z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2| \quad (M9)$$

a **hiperbolikus** számoknál a számsík I. sík-negyedében, tehát azokra a számokra, melyek valós része pozitív, és nagyobb, mint az imaginárius egységelem valós szorzója.

## 3. A kételemű számok és a geometriai algebra

A kételemű számok a kvadratikussal ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós Clifford-algebrát reprezentálják. Elmondhatjuk, hogy a **geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtái egyáltalán nem szegényes szerkezetűek, hanem igen izgalmas alapstruktúrát mutatnak a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus számok formájában.**

## 4. Geometriák modellezése

Ha egy gömb sugarát  $R$ , görbületét  $\rho$ -val jelölöm és az arányukra a következő igaz:

1.  $i = \frac{\rho}{R}$
2.  $j = \frac{\rho}{R}$
3.  $k = \frac{\rho}{R}$

ahol  $i^2 = -1$ ,  $j^2 = 0$ ,  $k^2 = 1$ , akkor ezeken a gömbökön leírt síkgeometria a hiperbolikus, az euklideszi és a gömbi síkgeometria modellje.

Természetesen ez egyelőre csak formai érdekesség, hiszen például a 2. esetben az  $R$  sugár, mint kételemű szám nem értelmezhető, a többi esetben pedig a sugár és a görbület, mint képzetes szám értelmes, de mint geometriai fogalom csak a kételemű számok képzetes részének végtelen értelmezésével közelíthető meg.

Megjegyzem, hogy a **Bolyai**-geometriát formálisan egy komplex sugarú gömbön modellezték eddig, itt pedig komplex görbületű gömböt használtam az analógiára. Az elliptikus és a hiperbolikus esetben ez formálisan mindegy, de a parabolikus számoknál az  $R$ , mint sugár nem értelmezhető kételemű számként, amint utaltam rá, ezért indultam ki a görbületekből. Az extenzív és intenzív végtelenek dualitásából viszont az következik, hogy akár a sugárból, akár a görbületből való kiindulás ugyanarra az eredményre vezet.

## 5. Halmazelméletek modellezése, és a végtelen, mint új minőség megjelenítése

A kételemű számok, mint végtelen-modellek a kontinuum-hipotézist nem tagadják, hanem – a geometriabeli párhuzamossági axiómákhoz hasonlóan – három lehetséges változatát nyújtják a **Cantor** által megfogalmazott „nincsenek közbülső számosságok” féle állításnak. A klasszikus kontinuum hipotézis a komplex számsík által modellezhető. A három számsík, mint végtelen-modell egyikéhez sem tartozik hozzá aktuális létezőként a  $10^\mu$  formában felírható nagy szám modellbeli megfelelője, ahol  $\mu$  a természetes számok számosságát jelöli. Aktuálisan létező, tehát a számsíkon konkrét számként megjelenő végtelen-modell, azaz minden  $n$  természetes számnál nagyobb számnak a megfelelője, mely ugyanakkor definíciója szerint  $10^\mu$ -nél kisebb végtelen: a *parabolikus számsíkon egyetlen* létezik, a *hiperbolikus számsíkon viszont végtelen sok* van belőle. A *komplex számsíkon pedig nem létezik* konkrét számként megjelenő, azaz aktuálisan létező végtelen nagy szám modellbeli megfelelője.

**Ilyen módon a háromféle számsík, mint szám-modell megfeleltethető a kontinuummal kapcsolatos állítás egy-egy speciális megfogalmazásának.**

Azért nem nyilvánvaló a kételemű számokban rejlő végtelen-modell, mert ezek a számrendszerek a végtelent nem mennyiségként, hanem minőségében újként mutatják meg. Átaluk a végtelen legfontosabb tulajdonságát tudjuk ábrázolni; a végtelennek nem a mennyiségi, hanem a minőségi oldalát. **A végtelen, mint másféle minőség egy új dimenzióként jelenik meg matematikailag a fent említett számrendszerekben.**